7

OSSERVAZIONI CRITICHE

SU LA

SCUOLA SINTETICA NAPOLITANA

DI

BERNARDO SCOTTI GALLETTA

Si vende in Napoli, strada Trinità Maggiore
n. 6, e Fontana de' Specchi n. 14.

PREZZO GR. 60

Al chiarissimo Cavaliere Canonico D. Andrea de Jorio in attestato di stima. L'Autore.

OSSERVAZIONI CRITICHE

SU LA

SCUOLA SINTETICA NAPOLITANA

DI

BERNARDO SCOTTI GALLETTA.

NAPOLI
DALLA TIPOGRAFIA DELL' ARIOSTO

1843.

CAPO I.

Valentia del Sig. Fergola nella Geometria degli antichi. Ragioni, per le quali egli non fece dell' analisi moderna quel conto, che dovea farne. Paralello tra la Geometria degli antichi e la moderna. La diffusione dell' analisi moderna ha fatto cambiar faccia alle matematiche. Obbietto della presente operetta. Proteste dell' autore.

1. Non può rivocarsi in dubbio che il Fergola non sia stato uno de' più distinti Geometri del Regno di Napoli. Questo grand' uomo avea talmente approfondite le opere degli antichi Geometri, che le avea in sè trasfuse, e convertite in succo e sangue; epperò ei non pensava, non iscrivea, e saremmo per dire, non sognava, se non come i grandi modelli dell' antichità su i quali erasi di buon' ora formato. Bei parti del suo vasto ingegno e delle sue lunghe meditazioni su gli antichi geometri sono le *Soluzioni di alcuni problemi geometrici*, il *Nuovo Metodo da risolvere alcuni problemi di Sito*, la *Vera Misura delle Volte a spira*, la *Risoluzione di alcuni problemi ottici*, i *Problemi delle Tazioni risoluti con nuovi artifizi di Geometria*, le *Istituzioni sui conici*, le *Prelezioni sui Princi-*

Digitized by Google

pj Matematici del Newton, e tante altre produzioni dettate tutte con chiarezza e nitore veramente ellenico (1).

2. Allorchè i moderni geometri Lagrange, Laplace, Monge, Poisson, Lacroix, ecc. mostravano che l'Algebra era un potentissimo mezzo per risolvere le quistioni più astruse di Geometria, Meccanica, ed Astronomia, e ch'essa era il linguaggio proprio della Geometria, mediante il quale questa acquistava tutta la estensione, di cui era suscettiva, il Fergola si era già troppo impressionato ed invaghito degli antichi geometri, e giunto ad una età già troppo avanzata e per esser sensibile alle impressioni della moderna analisi, e per potersi in essa approfondire. Non avendola dunque approfondita, gli parve ravvisare in essa qualche cosa di vago e non conforme alla pura e severa Geometria degli antichi; epperò non fece di essa quel conto che dovea farne. La ragione però più forte, onde il Fergola non solo non tenne in molta stima l'analisi moderna, ma ancora si mostrò ad essa avverso, si fu ch'egli non giunse mai a risguardare l'Applicazione dell'Algebra alla Geometria, come la stessa Geometria, che parlava il proprio linguaggio; ma sibbene come lo innesto di due scienze infra loro eterrogenee, di cui la prima avesse alterata la purità della seconda. Laonde al grand'uomo parea di scorgere nell'Applicazione dell'Algebra alla Geometria lo imbastardimento della rigorosa Geometria degli antichi, laddove nel fatto l'Algebra non faceva altro che far parlare la Geometria col proprio linguaggio.

3. La Geometria degli antichi era una Dea; ma una Dea muta, la quale non pertanto con gesti e segni sapea così ben esprimere le sue alte concezioni, che non avrebbe saputo far meglio, se della favella non fosse stata priva;

(1) Chi avesse vaghezza di conoscere il lungo catalogo di tutte le opere inedite e stampate di questo illustre Geometra potrà consultare le *Brevi notizie intorno alla vita del Fergola* premesse al suo *Trattato analitico delle sezioni coniche* dal Sig. Flauti.

ma era riserbato a pochi suoi cariti adoratori la comprensione del suo misterioso gestire. La Geometria al presente è la stessa Dea degli antichi, che parla il linguaggio algebrico; linguaggio esteso, facile ed intelligibile non a' soli esseri fortunati, che essa ammette nel suo tempio; ma a tutti gli uomini. Mercè dunque di un tale linguaggio ella si è fatto da tutti adorare. A Cartesio dunque ed al Lagrange dee in preferenza questa Dea la propagazione del suo culto, i quali perciò meritano i più distinti monumenti nel suo tempio.

4. Benchè l'avversione all'analisi moderna del Fergola e della sua Scuola, nella quale l'avea trasfusa in un coll'amore della sintesi, opponesse de' forti ostacoli alla sua diffusione nel nostro Paese, pure per gli sforzi di molti geometri non prevenuti, essa si è abbastanza propagata. Per tale propagazione le matematiche han cambiata faccia presso di noi, e sono giunte a quell'alto grado di coltura in che al presente si vedono.

Se si riflette da una parte che a' tempi del Fergola i giovani non oltrepassavano lo studio delle Sezioni Coniche, che non eravi in tutta Napoli alcuna scuola di Calcolo differenziale ed integrale (1), che quei pochi giovani, che si facevano a studiare la Meccanica, studiavano o quella del Caravelli, o quella del Fergola, che le opere analitiche del Lagrange, del Laplace, del Lacroix, ecc. erano presso di noi ignote, e dall'altra che al presente i giovani non istudiano fino alle sezioni coniche; ma tutte le matematiche pure e buona parte delle miste, che lo studio del Calcolo Differenziale ed Integrale si è reso usuale tra noi, che ora si studia la Meccanica del Ven-

(1) Il Cagnazzi fu costretto a studiare il Calcolo Differenziale ed Integrale da sè stesso per mancanza di un professore di questa facoltà in tutta Napoli, ed imbattendosi in alcune difficoltà fu costretto a scrivere al distinto matematico Saladini a Bologna. Siamo stati assicurati di questo fatto dallo stesso Cagnazzi, che tanto si eleva nelle Scienze Economiche.

turoli di gran lunga superiore alle nominate di sopra, che le opere del Lagrange, del Laplace ecc. sono tra noi familiarissime, è forza conchiudere il gran progresso, che abbiano fatto le matematiche da cinquanta anni in quà.

5. Il presente stato florido delle matematiche vien negato dalla scuola del Fergola, la quale, oltrepassando ancora i limiti del verisimile, sostiene che le matematiche vadano di giorno in giorno deteriorando presso di noi, che la morte del Fergola, e l'essersi ritirati i principali suoi allievi dall' insegnamento ha dato luogo a un totale abbandono per la Scuola matematica Napolitana, che non pullulano più quei giovani istruiti, che si vedeano pullulare per lo passato, ch'è tale lo stato attuale delle matematiche, che si è imbarazzato nella scelta di un professore anche per gli Elementi di Geometria, ecc. Per ismentire queste ed altre ingiustissime querele, le quali se in minima parte fossero vere, farebbero grandissima vergogna al nostro colto Paese, ci siamo proposti di scrivere le presenti *Critiche Osservazioni su la Scuola Sintetica Napolitana*. In esse è nostro divisamento di mostrare 1.° che le matematiche non abbiano deteriorato, ma progredito. 2.° Che il Fergola con tutta la sua Scuola sia ingiustamente prevenuto contro l'analisi moderna. 3.° Che il Fergola ed i suoi discepoli rinvengano de' difetti nei moderni analisti, perchè non li hanno pienamente compresi.

6. Prima però di venire alle prove di queste tre proposizioni ci piace protestarci su diversi punti. E primamente vogliamo protestarci di tenere in alta stima e il Fergola, e i suoi discepoli, e più ancora gli antichi, sul sacro capo de' quali, al dir del Monti, *riposa da tanto corso di anni la riconoscenza e la riverenza de' savi*. Secondamente vogliamo protestarci che quando ci siamo giovati di altri autori, li abbiamo scrupolosamente citati, e quando abbiamo potuto parlare le loro stesse parole, lo abbiam fatto; chè quando non si ha a dir nulla di proprio, è una vanità il dir diversamente ciò ch'è stato detto ottimamente. Da ultimo ci protestiamo di serbare profondo silenzio a qualunque

critica, che per avventura ci potesse venir fatta, non perchè ci tenessimo superiori all' altrui censura; ma perchè stimiamo inutile qualunque risposta. Se la critica è buona, dice il filosofo di Ferney, bisogna correggersi, se cattiva non curarla. E noi promettiamo di far l' una e l' altra cosa.

CAPO II.

Il Fergola non fece molto stima dell' analisi moderna, perchè non l' approfondì. Prove di questa proposizione dedotte da quelli stessi luoghi del Trattato analitico delle sezioni coniche *addotti dal Fergola per mostrare gli sconci, di cui sono infetti i corsi elementari de' moderni analisti, e la prevalenza, che debbono avere i metodi antichi ed il Cartesiano sull' analisi moderna.*

7. Il d' Alembert nella corrispondenza epistolare col Voltaire dice: *non criticate un autore morto se non quando avete ragione due volte. La morte è già una ragione ben forte (se non buona) in suo favore.* Convinti appieno di questa verità non avremmo osato affermare che il Fergola facesse poco stima dell'analisi moderna, per non averla approfondita, se non avessimo avuto ragione non una volta, ma dieci volte di affermarlo. Gli stessi luoghi del Trattato analitico delle sezioni coniche addotti dal Fergola per provare i difetti dell' analisi moderna, ne somministreranno le prove più irrefragabili.

8. Il Fergola, dopo aver dimostrato col metodo Cartesiano, che nella iperbole parilatera la somma degli angoli (Fig. 1.) MBX, MRX formati dalle rette tirate da un punto qualunque M dell' iperbole agli estremi dell' asse principale pareggi l' angolo retto, dice:

Quest' insigne proprietà dell' iperbole parilatera immediatamente si deduce dall' equazione di essa curva. E ne abbisognerebbe un lungo calcolo per poterla conseguire colla Geometria analitica a due coordinate. E quel che più ne duole questo metodo non potrebbesi universalizzare per rilevar la verità del presente teorema. L' ingegnosissimo Roberto Simson con un prodigioso lavorio di sintesi ha dimostrata la medesima verità nell' Appendice al suo trattato delle curve coniche. Ma io mi lusingo, che la via euristica quassù calcata sia conducente a poter dimostrare con eleganza la verità proposta, ed anche a rinvenirla facilmente, se sia d' uopo; evitandosi per tal modo

certe studiate preparazioni, che vi si soglion praticare, o gli stenti nel ridurne il risultamento (1).

Vediamo qual' è il lungo calcolo, che fa d'uopo eseguire per dimostrare questa proprietà dell'iperbole parilatera.

Rappresentino $y^2=x^2-a^2$ l'equazione dell' iperbole parilatera, ed $y=A(x-a)$, $y=A'(x+a)$ l'equazioni alle rette *MB*, *MR*.

Moltiplicando in corrispondenza l'equazioni delle rette, si avrà

$$y^2=AA'(x^2-a^2),$$

ed eliminando l'y tra questa equazione e quella della curva, si otterrà

$$1=AA', \text{ donde } A=\frac{1}{A'}.$$

Laonde la tangente dell' angolo MBX essendo uguale alla cotangente di MRX, l'uno è complemento dell' altro. Ed ecco eseguito il lungo calcolo ed universalizzato quel metodo, che doleva al Fergola di non potersi universalizzare. Quali poi sono le studiate preparazioni, o gli stenti nel ridurre il risultamento?

9. Prima di esaminare altri luoghi del Trattato analitico delle sezioni coniche, ne' quali il Fergola crede di far marcare altri sconci ne' Corsi di Geometria analitica, è di mestieri esporre brevemente la trasformazione delle coordinate dell'ellisse. Indicando con p e q gli angoli, che i novelli assi fanno coll' antico delle x, si avrà per le formole per passare da assi ortogonali ad assi obbliqui

$$x=x'\cos p+y'\cos q$$

$$y=x'\operatorname{sen} p+y'\operatorname{sen} q.$$

Sostituendo questi valori nell' equazioni dell' ellisse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, si avrà

(1) Trattato Analitico delle Sezioni Coniche, nota al n. 245.

$$(b^2\cos p^2 + a^2 \operatorname{sen} p^2) x'^2 + 2(b^2 \cos p \cos q + a^2 \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q) x'y' + (b^2 \cos q^2 + a^2 \operatorname{sen} q^2) y'^2 = a^2 b^2 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Non potendo fare svanire i termini in x'^2, y'^2, si farà svanire il termine in $x'y'$, e si otterrà l'equazione

$$b^2 \cos p \cos q + a^2 \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q = o,$$

ovvero

$$\operatorname{tang} p \operatorname{tang} q = -\frac{b^2}{a^2}. \quad \ldots \quad (b)$$

Il segno —, di cui è affetto $\frac{b^2}{a^2}$, indica che se p è acuto, q debb' essere ottuso, perchè le tangenti di essi sono affette da segni contrarî.

L'equazione (a) si ridurrà per l'equazione di condizione (b) a

$$(b^2 \cos p^2 + a^2 \operatorname{sen} p^2) x'^2 + (b^2 \cos q^2 + a^2 \operatorname{sen} q^2) y'^2 = a^2 b^2,$$

e ponendo

$$\frac{a^2 b^2}{b^2 \cos p^2 + a^2 \operatorname{sen} p^2} = a'^2, \quad \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos q^2 + a^2 \operatorname{sen} q^2} = b'^2,$$

si conseguirà in fine

$$b'^2 x'^2 + a'^2 y'^2 = a'^2 b'^2 \quad \ldots\ldots \quad (c).$$

pariforme a quella riferita agli assi ortogonali.

10. Pervenuto il Fergola con l'analisi cartesiana a questa stessa equazione, dice :

. . . . . .

Ma i moderni analisti col passaggio dalle coordinate rettangolari alle oblblique sogliono produrla immantinente. Imperocchè supponendo uguali a zero que' termini della trasformata, che contengono il prodotto delle coordinate, (*lo che suol dirsi* equazione di condizione) *vi ritengono i rimanenti, da' quali può congegnarsi per la curva un'equazione pariforme a quella, ch'è relativa agli assi coniugati, ed al centro. Or tutto questo è ben fatto, quando si dimostri a' giovani con chiarezza, che il primo frutto dell' equazione* D, *o dell' altra* G *vi dinoti* CL^2, *e l' altro multiplicatore della* x^2 *sia* $\frac{CL^2}{CF^4}$. (ossia che a', b' rappre-

sentino CF, CL). *Imperocchè un che si arresti a questa sola pariformità di termini, senza più dire, non viene a conchiudere sul soggetto della proposizione, che sono i diametri coniugati. E, s' ei li prenda per tali senza prefiggimento di prove, vi sarà un salto nella dimostrazione. E tali sconci, che osservo in alcuni di questi Corsi si doveano a' giovani indicare* (1).

Giunti i moderni all' equazione (*c*) non ne conchiudono, come dice il Fergola, che l'ellisse sia riferita ai diametri coniugati, e che questi sieno a', b'; perchè essi non hanno ancora definito cosa significhi diametro coniugato; ma dicono, poichè ad ogni valore di x' corrispondono due valori uguali e di segni contrarî di y', il nuovo asse delle x' dovrà dividere la curva in due parti simmetriche, ed essere per conseguenza un diametro. Similmente poichè ad ogni valore di x' corrispondono due valori uguali e di segni contrarî per x', l' asse delle y' dovrà dividere la curva in due parti simmetriche ed essere in conseguenza un secondo diametro. Siccome poi per l'equazione di condizione l'uno di questi diametri fissato, l'altro resta parimente fissato, così l' uno addimandasi *coniugato* per rispetto all' altro, e l' ellisse si dice rapportata a diametri coniugati (2).

Qual' è dunque il salto nella dimostrazione, e quali sono gli sconci che il Fergola osserva ne' Corsi di Geometria Analitica? Gli sconci osservati dal Fergola derivano dal perchè egli suppone che i moderni analisti prima definiscano i diametri coniugati dell' ellisse, come fa egli, e come suol praticarsi in tutte le istituzioni di Sezioni Coniche, e poscia giunti all'equazione (*c*) conchiudono di botto che la ellisse sia riferita a' diametri coniugati a',b', mentre la cosa è ben altrimenti; avvegnachè i moderni analisti, dopo aver trovato che a', b' dividono la curva in due parti simmetriche, e che sono per conseguenza suoi diametri, e che per l'equazione di condizione (*b*) la posizione dell' uno è conseguenza

(1) Trattato Analitico delle Sezioni Coniche, nota al n. 75.
(2) Boucharlat, Théorie des Courbes et des Surfaces du second ordre n. 305.

di quella dell'altro, chiamano l'uno coniugato per rispetto all'altro, e la curva rapportata a' diametri coniugati.

11. Se da un punto qualunque M (Fig. 2.) dell'ellisse si tirino all'estremità dell'asse maggiore *AB* le corde MA, MB, tra le tangenti trigonometriche degli angoli MAB, MBA esiste la medesima equazione di condizione *(b)*.

Sieno $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, ed $y = A(x - a)$, $y = A'(x + a)$ l'equazioni dell'ellisse e delle rette *MA, MB*. Moltiplicando in corrispondenza tra loro l'equazioni delle rette *MA*, *MB*, ed eliminando l'y, si avrà l'equazione $AA' = -\frac{b^2}{a^2}$, ch'è la medesima equazione di condizione (*b*). Laonde se pel centro dell'ellisse si tirino i diametri *CL, CF* rispettivamente paralleli alle corde *AM, MB*, questi saranno tra loro coniugati.

Il Fergola parlando di questo teorema mostra quanto poco e' sentisse nell'analisi de' moderni. Noi trascriveremo di mano in mano tutta quanta la nota, ch'ei scrive su questo proposito.

Una dimostrazione per quanto sia rigida, e ricolma di principî sublimi, è sempre da meno della intuizione. E perciò io mi sono in quest' opera attenuto all' analisi Cartesiana, ove il proposto teorema, come il farò poi vedere in tanti altri, riesce quasi intuitivo. Ed in vero, s' io colla Geometria analitica a due coordinate volessi dimostrarlo, dovrei prender l' equazione alla retta AM: *poi quella alla* BM: *moltiplicar fra loro coteste equazioni: paragonarne il prodotto loro all' equazione dell' ellisse: e così dovrei altre cose praticare, che non sono mica naturali, nè sì chiare a' giovani, quanto l' addotto ragionamento.*

Dal semplicissimo ragionamento da noi poc' anzi tenuto per trovare l'equazione $AA' = -\frac{b^2}{a^2}$, si scorge che non esistano affatto quelle altre cose, che il Fergola crede dover praticare per dimostrare l'esposto teorema. Non sappiamo poi come la moltiplicazione di due equazioni

tra loro, e la eliminazione dell'y sieno *cose non mica naturali e chiare*. Volendo dunque ottener la dimostrazione del teorema in questione con la Geometria a due coordinate, dopo aver praticate tante cose *non mica naturali e chiare*, egli perverrebbe all'equazione $AA'=-\frac{b^2}{a^2}$, ch'è per lui una mostruosità. *Ed infine* (prosegue) *abbattendomi all'equazione* $AA'=-\frac{b^2}{a^2}$ *qual si rileva da' coltivatori di quel metodo, come potrò ridurre in linguaggio geometrico cotesta equazione? La Geometria non conosce grandezze negative: e gli analisti neppur son paghi delle nozioni, che ne hanno.* Vedi il sommo d'Alembert vol. 8 Opus., e Carnot, Geom. des positions.

Seguendo lo stesso d'Alembert citato dal Fergola, la interpetrazione del segno meno è più che ovvia. In fatto il d'Alembert dice:

C'est qu'en générale le signe négatif indique qu'une quantité doit être prise dans la solution non pas précisement en sens contraire des quantités positives, mais seulement du côte contraire à celui qu'on avoit supposé (1). Ma si era supposto che la retta AM facesse un angolo acuto coll'asse delle x, dunque dee supporsi che lo faccia ottuso, e perciò la sua tangente dev' essere affetta dal segno $-$, laddove erasi supposta affetta dal segno $+$; di maniera che se si fosse tenuto conto da principio della posizione della retta AM, affettando la sua tangente trigonometrica del segno $-$, sarebbe svanito questo segno, e sarebbesi ottenuto

$$AA'=\frac{b^2}{a^2}, \text{ e quindi } A:\frac{1}{A'}::b^2:a^2,$$

ch'è lo stesso teorema dimostrato dal Fergola per ben quattro volte ne' n. 39. 47. 52. 71.

(1) Opus. vol. 8. *Sur les quantités négatives*, n. 3.

Non potendo spiegare il segno —, di cui è affetto $\frac{b^2}{a^2}$ il Fergola vede de' chiaroscuri nelle moderne istituzioni di Geometria Analitica, i quali gli cagionano gran duolo. *Ed io m' immagino* (così termina la nota) *che da tali chiaroscuri sia nato ciocchè leggo con mio duolo in alcuni di cotesti Corsi analitici replicatamente*, che siavi una relazione costante tra gli angoli, che formano coll' asse maggiore le corde menate da' suoi estremi ad un punto della curva (1).

I Geometri non si sono mai ingannati nella interpetrazione delle quantità negative, nè queste hanno cagionato de' chiaroscuri da indurli in errori. Essi si son trovati piuttosto imbarazzati nel definire le quantità negative (2). Il Newton e l'Eulero tuttochè ammettessero per quantità negative quelle che fossero meno di zero, nozione secondo il Carnot e il d'Alembert poco esatta, pure sappiamo che questi Geometri non si sieno mai ingannati nella interpetrazione delle quantità negative (3). Ma se talune volte la interpetrazione delle quantità negative in Geometria esige della sagacità, nel caso attuale la interpetrazione del segno — si presenta da

---

(1) Trattato Analitico delle Sezioni Coniche, nota al n. 71.

(2) Il considerar le quantità negative minori di zero è supporre, dice il Carnot, che da zero si possa sottrarre una quantità, ciò che non è possibile. Il considerare le quantità negative per quelle, che sono in senso opposto alle positive, dice il d'Alembert, induce talvolta in errore. Così, benchè il raggio vettore dell' ellisse avesse direzioni opposte, pure conserva sempre lo stesso segno +; ed al contrario i cambiamenti di segno nel raggio vettore dell' iperbole non corrispondono a direzioni opposte di esso. Il Carnot sostituendo alla nozione delle quantità positive e negative quella delle quantità *dirette* ed *inverse*, e considerando ciascuna di esse come la differenza variabile di due altre quantità, che divengono alternativamente ora più grandi, ora più piccole l'una dell'altra, fa disparire tutte le anomalie, che possono presentare le quantità negative nella soluzione de' problemi geometrici.

(3) Carnot, Géométrie des positions.

sè a qualunque principiante. Ma quello che riesce più strano si è che il Fergola non ravvisi tra gli angoli, che formano coll'asse maggiore le corde menate da' suoi estremi ad un punto qualunque della curva, quella relazione costante, che vi ravvisano i moderni. In verità noi non sapremmo dare una spiegazione a questo luogo del Fergola senza ammettere che o il Fergola abbia letto ragione invece di *relazione costante* ne' moderni analisti, quale ragione non esiste tra le tangenti de' summentovati angoli; ma tra la tangente e cotangente di essi, come egli medesimo dimostra ne' paragrafi citati, o che non abbia posta alcuna differenza tra ragione e relazione costante.

12. Proponendosi il Fergola di menare una tangente all'ellisse da un punto dato fuori di essa coll'Analisi Cartesiana perviene a questa equazione

$$h^2 (v^2 - a^2) = c^2 (v - b)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (H)$$

in cui a, c rappresentano gli assi dell'ellisse, b, h le coordinate del punto dato, v l'ascissa tagliata dalla tangente cercata sull'asse delle x, e credendo di rinvenire un grosso sconcio nella Geometria analitica de' moderni nella soluzione di questo problema, soggiugne:

Intanto il presente problema risoluto colla Geometria analitica ci offre la seguente equazione

$$(a^2 h^2 + c^2 b^2)\, x^2 - 2\, a^2 c^2 b\, x - a^2 (h^2 - c^2) = o$$

ch'è della H assai più difficile, e di una tediosa e grave costruzione. Ma potrà concedersi ad un che coltivi questo metodo, che, divisa l'unità della soluzione, ne lasci il risultamento senza costruzione, e che altrove, per altre teoriche vi rilevi i punti soddisfacenti? (1).

Forse ha dato luogo a questa osservazione del Fergola il seguente tratto del Boucharlat:

Si le point était donné hors de la courbe, soient α', β' les coordonnées de ce point, en nommant toujours α, et β les coordonnées inconnues alors du point α, β on aura pour déterminer α et β les équations

$$\beta' - \beta = \frac{\frac{1}{2} m + n \alpha}{\beta} (\alpha' - \alpha) \text{ et } \beta = m \alpha + n \alpha^2 \;.\;.\;.\; (2)$$

(1) Trattato analitico delle Sezioni Coniche, nota al n. 40.
(2) Théorie des Courbes et des surfaces, 2. édit. n. 252.

Or qui si vede che lo scopo del Boucharlat non sia affatto quello di risolvere il problema particolarissimo risoluto con eleganza dal Fergola; ma più tosto di esibire le formole generali per menare una tangente ad una curva conica in generale da un punto dato fuori di essa. Del resto se un coltivatore della moderna analisi avesse a risolvere il problemuccio in discorso eviterebbe l'equazione dell'*H assai più difficile e di una tediosa e grave costruzione* nel modo seguente:

Si riferisca l'ellisse a' diametri coniugati $2a$, $2b$, il primo de'quali passi per lo punto dato, di cui α rappresenti l'ascissa. L'equazione dell'ellisse rapportata ai diametri coniugati $2a$, $2b$, e quella della sua tangente menata da un punto x,y fuori di esse sono

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \text{ ed } a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2$$

La seconda di queste equazioni dovendo essere soddisfatta da $x = \alpha$, $y = o$, affinchè la tangente passi pel punto dato, darà

$$b^2 x \alpha = a^2 b^2, \text{ e quindi } x = \frac{a^2}{\alpha},$$

che rappresenta una retta parallela al diametro coniugato a quello, che passa per lo punto dato. L'intersezione di questa parallela coll'ellisse darà il punto di contatto cercato (1).

Potremmo addurre molti altri luoghi del Trattato analitico delle Sezioni Coniche, ne'quali il Fergola lungi dal mostrare i difetti dell'analisi moderna, non fa che attestare quanto in essa egli fosse poco versato, e quanto contro della stessa prevenuto; ma stimiamo meglio far conoscere che il Fergola si fa a criticare il Lagrange, il Monge, il Lacroix, perchè non li ha pienamente compresi; il che faremo nel seguente capitolo (2).

---

(1) Tanto questo luogo del Fergola, quanto il precedente sono stati anche osservati dal Sig. Padula nella sua dotta prefazione alla *Risposta al Programma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica.*

(2) Preghiamo il lettore di far seguire alla lettura del presente capitolo l'aggiunta a pag. 155.

CAPO III.

Il sig. Fergola rinviene dei difetti in alcune proposizioni del Lagrange, del Monge, del Lacroix, perchè non le ha pienamente comprese. Prove di questa proposizione. Cenno intorno alle Note critiche e geometriche *del sig. Flauti sul Trattato Analitico delle Sezioni Coniche del Fergola.*

13. Nella Teoria delle funzioni analitiche l'immortale Lagrange fa osservare che i problemi, che si possono generalmente proporre su i contatti delle curve, sono di due sorte, diretti ed inversi. I primi riducendosi a trovare alcuni elementi del contatto d'un certo ordine, e non dipendendo che dall' analisi diretta delle funzioni, sono sempre solubili analiticamente. I secondi al contrario, conducono all' equazioni derivate, e la loro soluzione dipendendo dall'analisi inversa delle funzioni, si trova soggetta a tutte le difficoltà di questa analisi. Non pertanto, soggiunge lo stesso Lagrange, vi sono de' casi, in cui si possono direttamente risolvere per mezzo di particolari considerazioni, che derivano da certe finezze analitiche. Questi casi sono quelli, nei quali la relazione data esiste solamente tra gli elementi del contatto senza che le coordinate x, y vi entrano. E per dare egli una idea od un esempio di siffatti problemi, si propone di trovare la curva, di cui ciascuna tangente tagli due ordinate (prolungate s'è necessario) corrispondenti alle ascisse $x=m$, $x=n$, di maniera che il prodotto delle parti di queste ordinate comprese tra la medesima tangente e l'asse delle ascisse sia sempre costante ed eguale a K, e trova per l' equazione di questa curva

$$y^2+\frac{4K(m-x)\ (n-x)}{(m-n)^2}=o. \ . \ . (1)$$

(1) Théorie des Fonctions Analitiques, n. 122.

che appartiene all' ellisse od iperbole secondo che VK è una quantità positiva o negativa. Il grande asse è $m-n$, il piccolo VK, e i due vertici corrispondono alle ascisse $x=m$, $x=n$.

La proprietà delle tangenti, che conduce il celebre matematico Torinese all' equazione dell' ellisse o della iperbole vien dimostrata dal grande Apollonio nel terzo libro dei conici nella proposizione XLII; ma l' analisi Lagrangiana ha il vantaggio di far vedere che questa proprietà appartiene esclusivamente alle curve coniche.

Nel numero 168 della stessa opera applicando il Lagrange i suoi generalissimi metodi, onde rinvenire delle curve, che fossero dotate in ciascun punto di una data proprietà di *maximum* o *minimum*, si propone di trovare la curva, di cui la quantità K sia un *maximum* o *minimum* in ciascun punto, e trovando la medesima equazione di poc' anzi, ne conchiude che le sezioni coniche, oltre alla proprietà di sopra menzionata, hanno anche l' altra, che la posizione della tangente a ciascun punto della curva, risguardata come data, è tale, che lo stesso prodotto K è un *maximum* per l' ellisse, ed un *minimum* o *maximum* negativo per l' iperbole.

Veniamo al signor Fergola. Dopo aver egli dimostrate queste due proprietà dell' ellisse, soggiunge parlando dell' ultima il seguente scolio:

La verità, che ho dimostrata nella parte II. di questo teorema fu ignota a' Geometri antichi, e si è conosciuta non ha guari dall' acutissimo sig. Lagrange col metodo delle variazioni, o con quello, onde suol rinvenirsi una curva, che sia adorna di una data proprietà di massimo, o di minimo in ciascun punto. Il dottissimo Lacroix dirigesi allo stess' oggetto col metodo de' massimi, e de' minimi delle funzioni differenziali. Ed io mi lusingo, che non debba dispiacere ai geometri l' averla io rilevata con pochi giri di analisi geometrica, ed in modo più generale di quello de' due lodati analisti. Poichè essi si sono limitati al solo caso, che le parallele AO, GT (fig. 3.), *sieno perpendicolari alla retta* GA, *che congiunge i due punti dati* A, G: *e questa retta*

può essere comunque obbliqua a quelle due (1). *Ma non pertanto quel primo caso può anche risolversi coll' Analisi dei finiti in facil modo, come il fo qui appresso, proponendo nei seguenti termini il* Problema

Dato il punto M, *ch' è in mezzo alle due rette* AV, GT *perpendicolari alla stessa retta* AG, *determinarvi il sito della trasversale* OT ; *sicchè il rettangolo delle due intercette* AO, GT *sia un massimo.*

Determinata che ha la traversale *OT*, dimostra ch'essa è tangente in *M* all' ellisse, di cui il grande asse è *AG* ossia *m-n*, ed il piccolo asse è la media proporzionale tra *AO* e *GT*, ossia *VK*. Potendo fare lo stesso ragionamento per qualunque altro punto dell'ellisse *AMG*, ne conchiude la proprietà di massimo, di cui va fregiata questa curva in tutti i suoi punti. Dopo di ciò, non pago di aver criticata la soluzione del Lagrange e del Lacroix come non generale, soggiugne :

Il voler conseguire con un metodo sublime ciò che può aversi con un artifizio elementare, non si è mai riputato lodevole impegno (2).

Dacchè dunque nel Calcolo Integrale si trova la quadratura del circolo, dell' area della sfera, la cubatura della stessa ecc. ne potrebbe inferire il sig. Fergola che ciò è male, perchè il voler conseguire con un metodo sublime ciò che può aversi con un artifizio elementare non fu mai lodevole impegno. Ma questa riflessione è relativa al caso, in cui il Fergola avesse risoluta la medesima quistione del Lagrange. La quistione trattata dal Lagrange non ha che fare con quella del Fergola e n'è lontana le mille miglia. In fatto il Lagrange si propone di trovare tra le infinite curve quelle, in cui *K* è un massimo; ed il suo metodo d' invenzione gli fa trovare le curve coniche. Al contrario il Fergola dimostra che nell' ellisse la quantità K è un massimo (dietro di aver saputo da questo, che l' ellisse era dotata di siffatta proprietà). Ciò posto, il confronto che fa il signor

---

(1) Trattato Analitico delle Sezioni Coniche, n. 133.
(2) Idem, n. 136.

Fergola della sua ricerca con quella del celebre Lagrange mostra di non averlo egli pienamente compreso, perchè questi non si prefigge di dimostrare che K sia un massimo per l'ellisse, perchè non sa ancora questa proprietà dell'ellisse, ma di rinvenire s'esistono curve dotate di questa proprietà, e, nel caso ch'esistono, quali sono queste curve? Poteva essere più generale la ricerca del Lagrange? Se il signor Fergola avesse compresa la generalità della proposizione del Lagrange, non avrebbe certamente osato di dire che la proprietà dell'ellisse da lui rinvenuta fosse più generale di quella dedotta dal Lagrange, e che il voler conseguire con un metodo sublime ciò che può aversi con un artifizio elementare non fu mai lodevole impegno. Come dimostra egli col suo artifizio elementare che tra le infinite curve la sola ellisse sia dotata di questa singolarissima proprietà di *maximum?*

Il Lacroix dirigesi alla medesima ricerca del Lagrange non col metodo delle funzioni differenziali, come dice il Fergola, ma con quello delle variazioni, cercando la curva, in cui il prodotto K sia un *maximum* (1). Laonde neppure la ricerca del Lacroix ha che fare con quella del Fergola, nè in essa il Lacroix poteva usare un artifizio elementare.

14. Parlando il Lagrange del teorema ciclometrico Cotesiano dice:

« On ignore comment Cotes l'a trouvé, et on en a donné apres sa mort différentes démonstrations plus ou moins simples, et même plus ou moins rigoreuses.

Sans avoir recours aux expressions imaginaires, comme on le fait comunément, on peut le deduire directement des formules données mêmes par Viete, que nous avons rapportées dans la table (A) il est vraisemblables que c'est ainsi que Cotes y est parvenu.

En effet, si on multiplie ces formules par 2, et qu'on y suppose $p = y + \frac{1}{y}$ elles se réduisent à cette forme

(1) Veggasi il n. 842 del Calcolo in 4.° del Lacroix.

simple,

$$2\cos. x = y + \frac{1}{y} \qquad 2\cos. 4x = y^4 + \frac{1}{y^4}$$

$$2\cos. 2x = y^2 + \frac{1}{y^2} \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$2\cos. 3x = y^3 + \frac{1}{y^3} \qquad 2\cos. mx = y^m + \frac{1}{y^m} \quad (1)$$

Da ciò si vede che il Lagrange dimostra il teorema ciclometrico Cotesiano non senza l'impiego delle quantità immaginarie; ma dell' espressioni immaginarie. Laonde pare che il Fergola non faccia alcuna distinzione tra quantità immaginarie, ed espressioni immaginarie, allorchè dice: « *Il Sig. Lagrange nelle* Séances des Écoles Norm. *s'impegnò a dimostrare il teorema ciclometrico Cotesiano col supporre* $2\cos.\varphi = x + \frac{1}{x}$, *derivando con egregj analitici ripieghi dover esser benanche* $2\cos. n\varphi = x^n + \frac{1}{x^n}$. *Ma sembrami, ch' ei non vi abbia evitate le grandezze immaginarie, come il pretende: poichè quì sopra si è veduto essere immaginaria la* x, *tuttochè ella non appaja esser tale* » (2).

15. Teorema. Data di posizione la curva conica (*fig.4.*) MNB, e il punto P, determinare la locale del concorso R delle tangenti condotte per gli estremi di ciascuna corda Nn, che passi pel punto dato.

Il Puissant, il quale maneggia l' analisi moderna con molto gusto e delicatezza, dimostra l' enunciato teorema in pochi versi (3). Il Fergola al contrario lo dimostra per l' ellisse coll' analisi Cartesiana, e v' impie-

(1) Iournal de l'école polytechnique.
(2) Trattato Analitico delle Sezioni Coniche, nota al n.° 278.
(3) Recueil de diverses propositions de Géométrie, n. 81.

Digitized by Google

ga una lunga dimostrazione (1), dalla lunghezza della quale rimanendo ei medesimo scandalizzato dice:

Quest' ammirabile proprietà dell' ellisse, che poi vedrassi appartenere a tutte e quattro le linee di second' ordine, vien dimostrata nei Corsi sintetici con brevi luminosissime ragioni. Il Sig. Monge la deriva da principj sublimi e per la teorica de' piani tangenti le superficie di rivoluzione. E mi parea conveniente rilevarla coll' analisi Cartesiana, e con solamente considerarvi l'equazione alla data ellisse, ed alla locale de' punti medj delle sue corde, che passano per un dato punto (2).

Esaminiamo un momento in che modo deriva il Monge questa proprietà, e se la critica del sig. Fergola è giusta.

Il Monge, menando per una retta data un piano tangente ad una sfera, inviluppa a questa due superficie coniche aventi i loro vertici sulla retta, e poscia ne deduce che il piano tangente richiesto dovendo essere nello stesso tempo tangente alle due superficie coniche descritte, il suo punto di contatto colla sfera debb' esser l' intersezione dei due cerchi di contatto delle due superficie coniche colla sfera, e trova effettivamente questa intersezione, e quindi il piano tangente. Siffatta soluzione conduce naturalmente il Monge *à la découverte de quelques remarquables propriétés du cercle, de la sphère, des sections coniques, et des surphaces courbes du second degré* (3). Infatto se si concepisce la superficie conica tangente la sfera ed avente il vertice sulla retta, muoversi, in modo che il suo vertice resti sempre sulla retta, senza cessare di toccare la superficie sferica nelle circonferenze di cerchi, le quali dovranno intersegarsi tutte nei due punti di contatto della sfera co' due piani tangenti, e la retta che unisce questi due punti, sarà quindi l' intersezione di tutti i piani de' cerchi di contatto. Dippiù se si concepisce menato il piano per la retta data

(1) Trattato analitico delle Sezioni Coniche, n. 141.
(2) Idem, n. 145.
(3) Monge, Géométrie Descriptive, n. 38.

ed il centro della sfera, questo essendo perpendicolare ai piani di tutti i cerchi di contatto, sarà perpendicolare alla loro comune intersezione, e li taglierà tutti secondo linee rette, che saranno tante corde del cerchio massimo prodotto da esso piano, le quali passeranno tutte pel medesimo punto, ch' è appunto l' intersezione del piano menato colla retta, che unisce i due punti di contatto.

Ciò posto, se per due punti presi su di una superficie sferica si fanno passare quanti piani si vogliono, e i cerchi d' intersezione di essi colla sfera si prendono per basi di superficie coniche rette tangenti la sfera, è chiaro che tutti i loro vertici dovranno essere allocati in una medesima linea retta. Esaminando la sezione prodotta da questo piano in tutte le superficie coniche, si vede che tutti i concorsi delle tangenti menate agli estremi delle corde di un cerchio passanti tutte per un medesimo punto preso dentro di esso, sono allocati in una linea retta, che ne sarà per conseguenza la locale. E rimontando all' origine della quistione si scorge che questa proprietà del cerchio non ha luogo, dal perchè la superficie è una sfera; ma dacchè le curve di contatto delle superficie coniche colla sfera sono piane; e poichè ciò succede per tutte le superficie di secondo grado, così la proprietà del cerchio poco anzi trovata è comune a tutte le curve coniche. Risulta da questo raziocinio che lo scopo del Monge non sia quello di trovare l' anzidetta proprietà delle curve coniche; ma di menare per una retta data un piano tangente alla sfera, e poichè la soluzione di tale problema lo conduce alla scoperta di questa proprietà, ei non fa che avvertirla. Il dire quindi che il Monge la derivi da principî sublimi, e per la teorica de' piani tangenti le superficie di rivoluzione è non comprendere lo scopo, ch'ei si prefigge nella sua Geometria descrittiva. Se lo scopo principale del Monge fosse quello di dimostrare questa proprietà delle curve coniche, e per riuscire al suo intento facesse uso della teorica delle superficie di rotazione, sarebbe giusta la riflessione del Fergola; ma nel luogo ove sta, mostra, ripetiamo, di non aver

Digitized by Google

egli penetrato lo scopo del Monge, il quale è più tosto di far avvertire, come la soluzione del piano tangente ad una sfera menato per una retta data conduce naturalmente alla scoperta di questa verità, che la dimostrazione della stessa verità.

16. Il Trattato analitico delle Sezioni Coniche del Fergola vien seguito da talune *Note critiche e geometriche* del suo illustre discepolo Flauti, il quale si mostra più del suo maestro avverso all' analisi moderna. Noi parleremo in seguito ed a lungo della prevenzione di questo altro Geometra. Non vogliamo però qui astenerci di notare due cose, la prima delle quali si è ch'ei crede esser cosa dura far concepire al giovine come un pareggiamento algebrico possa rappresentare una curva (1), e giugne a chiamare *veste analitica* l'equazione di una curva (2).

La seconda cosa è che dal confronto del numero de' geometri sommi ottenuto co'metodi antichi e col Cartesiano con quello ottenuto co' moderni egli deduce la preferenza de'primi su i secondi. *Si paragoni*, dic' egli, *il gran numero di uomini sommi ottenuti con quella istituzione a ciò che ora avviene, e si vedrà subito per quale delle due maniere stia la preferenza* (3).

A prescindere che in questo confronto manca l'elemento del tempo, ci faremo a riflettere che gli uomini sommi riuscirono tali non pei metodi, ma per il loro genio. Archimede, Apollonio, Galilei, Newton, Leibnitz, Cartesio, i Bernoulli, ecc. debbono la loro celebrità unicamente al loro genio. Quali metodi guidarono il Newton, ed il Leibnitz nel tempo stesso alla tanto famosa scoverta del calcolo delle *flussioni*? Quali metodi condussero il Cavalieri alla scoverta della *Geometria degl'indivisibili*? Quali metodi per tacer di altri poterono far iscovrire al giovane Lagrange il calcolo delle *variazioni*? Si aggiunga che se i sommi geometri fossero una conseguenza de' metodi,

---

(1) Fergola, Trat. anal. delle Sez. Con. Note crit. e geom. pag. VI.
(2) Idem, pag. IX.
(3) Idem, pag. XII.

Digitized by Google

non potrebbesi spiegare la gran penuria di sommi geometri in alcuni secoli, ed in altri la grande abbondanza. La storia delle matematiche (in cui tanto si mostra versato il Flauti) non ci presenta dal Geometra di Perga fino alla deplorabile distruzione della Scuola d'Alessandria alcun geometra di prim'ordine (1); e da questa infelicissima epoca fino al decimosesto secolo la Storia delle Matematiche del Montucla non comprende che poche pagine (2). Al contrario dal decimosesto secolo fino ai tempi nostri il numero de' sommi uomini nelle scienze matematiche fa inarcare le ciglia. I metodi spiegano la loro influenza nella diffusione della scienza; di maniera che la diffusione più o meno grande della scienza potrebbe esser uno degli elementi, ch'entrano nel calcolo della forza de' metodi. Laonde i metodi possono produrre più o meno seguaci alla geometria; ma non possono far di un uomo mediocre un sommo.

(1) Bossut, Saggio sulla Storia gen. delle Mat. T. I.
(2) Montucla, Histoire des Mathématiques, Part. I. liv. V.

CAPO IV.

La sintesi non si presta nelle applicazioni meccaniche come l'analisi moderna. Paralello tra la teorica de' proietti nel voto trattata colla sintesi, e la stessa maneggiata colla Geometria a due coordinate. Conseguenze, che ne derivano. Fiducia eccessiva della Scuola Sintetica sulle opere del Fergola.

17. La brevità di alcune proposizioni di Geometria dimostrate col metodo sintetico (la quale è il più delle volte una conseguenza delle proposizioni premesse) ha fatto a' Sintetici preferire la sintesi all'analisi moderna. Ora se lo scopo dello studio delle matematiche pure si è quello di apprendere le miste, è chiaro che bisogna dare la preferenza a quei metodi, che sono più conducenti allo apprendimento di queste. Ma poichè l'analisi moderna meglio della sintesi fa conoscere lo spirito ed il progresso della invenzione (1), e si presta a quelle astruse quistioni di Meccanica, che non sono accessibili alla sintesi, così è chiaro che essa meriti la preferenza sulla sintesi. *L'analisi*, dice il Bossut, *è la chiave di tutti i grandi problemi di Meccanica e di Astronomia fisica, che invano si tenterebbe di risolvere colla sintesi* (2). Ma noi voglia-

---

(1) I *principî matematici della Filosofia Naturale del Newton* non ebbero quel successo, che meritavano se non dopo il lungo spazio di sedici anni, perchè scritti col metodo sintetico. *Bossut, Saggio sulla Storia gen. delle Matematiche.* Tom. III.

(2) La Scuola Sintetica in sul principio sosteneva che bisognava dare esclusivamente la preferenza alla sintesi ed al metodo Cartesiano; e che l'analisi moderna traviava la gioventù dal retto sentiero d'inventar e di dimostrare in Geometria; di poi restringendo la sua asserzione, e non isciogliendo, ma troncando il nodo gordiano, ha detto che bisognava studiare tutti i metodi, e che i geometri, che non istudiavano gli antichi, si tarpavano un'ala nell'inventar e di-

mo quì mostrare che anche in quelle quistioni meccaniche, in cui la sintesi si presta molto volentieri, pure generalmente parlando non torna conto impiegarla per non perdere molto tempo. Per la qual cosa sceglieremo la teorica de' proietti nel vuoto, ch' è una tra le teoriche delle *Prelezioni sui principî Matematici del Newton* del Fergola più elegantemente trattata colla sintesi, e la confronteremo con la stessa maneggiata con la Geometria a due coordinate, ed affinchè il leggitore possa vedere a colpo d' occhio la brevità, con la quale procede l' analisi porremo l' una di rincontro all'altra.

---

mostrare in Geometria. Convenghiamo noi pure che i Geometri dovrebbero conoscere e i metodi antichi ed i moderni, e servirsi di quelli o di questi secondo meglio la bisogna richiede; ma non era questa la quistione, si trattava di preferenza e di preferenza nella istituzione della gioventù, e se i giovani avessero acquistate, posto sempre lo stesso tempo, più cognizioni seguendo gli antichi, o seguendo i moderni.

48. §. 352. *Prop. Se dal luogo* (fig. 5.) A *della superficie terrestre si proietti un grave per la direzione* AP *non verticale, e colla velocità* (*) *dovuta all' altezza* AE; *il suo sentiero sarà una Parabola conica, di cui la verticale condotta pel luogo della proiezione n' è un diametro, che ha per parametro il quadruplo dell' altezza* AE, *e per ordinate le parallele alla direzione* AP.

« Dim. La gravità di questo proietto decresce co-
» me il quadrato della sua distanza dal centro F di
» nostra Terra (276). Dunque se facciasi l'angolo CAP
» uguale al dato PAE, ed AC uguale ad AE; i
» punti C, ed F saranno i fuochi dell'orbita ellitti-
» ca, in ch' ei si muove, ed $FA + AC$ il di lei asse
» maggiore (346). E poichè le rette, che da ciascun
» punto dell' arco DA conduconsi al centro F della
» Terra, sono altrettante linee verticali; esse saran-
» no ad un dipresso parallele fra loro.

» Ciò premesso per due qualunque punti Q, q del-
» l' arco, che descrive il proietto, si tirino all' asse
» DN le semiordinate QC, qc: egli è di per se chia-
» ro, che le NC, Nc loro corrispondenti ascisse dal
» vertice rimoto N abbiansi ad avere per uguali; per-
» ciocchè non differiscon fra loro, che per la Cc e-
» vanescente riguardo ad NC. Dunque i quadrati di
» QC, e di qc, che sono proporzionali (1) a' rettangoli
» di NC in CD, e di Nc in cD saranno come le
» ascisse CD, cD (2). E quindi la curva ADQ sarà

(1) Prop. 8. Lib. II. Con. Giannat.
(2) Prop. 1. El. VI.
(*) La *velocità* di un mobile è il numero, che rappresenta lo spazio da esso percorso, diviso pel numero ch' esprime il tempo, in cui è percorso. La velocità dunque è un numero astratto. Il dir col Fergola che la velocità sia quella *determinazione sorta nel corpo dalla forza motrice che lo riempie, e che come cosa al corpo inerente può concepirsi*, è dare una idea molto vaga della velocità, perchè è dare una idea piuttosto di una quantità concreta che di un numero astratto. Il Professore D. Gabriele Fergola, il quale

Digitized by Google

Prendendo le ascisse nella verticale condotta dal punto di partenza, le ordinate parallele alla linea di proiezione, e facendo nell' equazioni generali del moto

$$\mathrm{P}dt = d.\frac{dx}{dt}, \ Qdt = d.\frac{dy}{dt}$$

$\mathrm{P} = g$, $Q = o$, si avrà integrando

$$\frac{dx}{dt} = gt + A, \ \frac{dy}{dt} = B.$$

Nell' origine del movimento essendo la velocità nel senso delle x nulla, e $\sqrt{2gH}$ nel senso delle y, chiamando H l' altezza AE, si avrà $\mathrm{A} = o$, $B = \sqrt{2gH}$, e

$$\text{perciò } \frac{dx}{dt} = gt, \ \frac{dy}{dt} = \sqrt{2gH}.$$

Integrando di nuovo, si otterrà

$$x = \frac{gt^2}{2}, \ y = t\sqrt{2gH} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

senza aggiungere costanti, poichè $t = o$ dee dare $x = o$

---

nella sua *Fisica Sperimentale* n. 54 adotta per la velocità la stessa definizione dello Zio, neppure attacca alla velocità la idea di un numero astratto. In fatto nella sua *Aritmetica* n. 2 prima di definire il numero, e propriamente nella definizione della quantità leggesi: *Dunque sono grandezze i corpi, che ci circondano, lo spazio .... la velocità, ... il tempo, ecc.* Questo Professore ritiene dunque che la velocità sia una quantità concreta come *i corpi, che ci circondano,* e che essa si possa comprendere prima di diffinire il numero.

» una Parabola conica (1), di cui la verticale condotta
» per A n'è un diametro, che ha per parametro il
» quadruplo di Ac, o di AE (2), e le ordinate dello
» stesso diametro son le corde parallele alla *PA. C. B. D.*

» *Cor. I.* 353. Da ciò che si è mostrato ben si rileva,
» che l'angolo TFE sia infinitesimo, e che l'arco circo-
» lare TE abbiasi ad avere qual retta perpendicolare
» alla TN. Dunque *la linea di sublimità dell'orbita pa-*
» *rabolica ADQ* (302) *sarà la direttrice di essa curva* (3).

» §. 354. Cor. II. (*fig. 6.*) I rami CA, CX della
» Parabola AXQ sono quanto le perpendicolari (4) AE
» XY condotte da' loro estremi sulla direttrice E P.
» Dunque *le velocità, che ha il proietto ne' luoghi* A,
» *ed* X, essendo in sudduplicata ragione delle altezze
» AE, XY, cui son dovute (153. n. 1.) *saranno an-*
» *cora in sudduplicata ragione de' rami, che ad essi*
» *luoghi corrispondono.*

§. 355. *Poste le medesime cose della proposizione precedente*, (fig. 7.) *tanto tempo v' impiega il proietto a descrivere l' arco parabolico* TC, *quanto vi porrebbe a condursi equabilmente e colla velocità di proiezione per la semiordinata* TB, *che ad esso arco corrisponde*, *o a calar naturalmente per la di lui ascissa* CB.

» Dim. Part. I. Dinoti S il centro della nostra
» Terra, SO l'asse della Parabola COA, al quale sien
» ordinate le rette TN, CM. Congiunte le rette ST,
» SC s'intenderà di leggieri, che il settore parabo-
» lico $STFO$ sia quanto il triangolo rettilineo STO:
» imperciocchè la loro differenza non è che il segmento
» parabolico TFO grandezza trascurabile rispetto a
» ciascun di essi. E quindi il settore $STFO$ al par
» del triangolo STO adeguerà il rettangolo di TN

(1) Prop. 7. Lib. I degli stessi Con.
(2) Prop. 18. Lib. I. dello stesso.
(3) Def. 8. Lib. I. Con. Giannat.
(4) Prop. 19. dello stesso.

ed $y = o$. Eliminando infine da queste equazioni t, si otterrà

$$y^2 = 4\ Hx,$$

ch' è la parabola richiesta.

Chiamando V, v le velocità del mobile ne' punti A, X, si avrà per la formola $udu = Pdt + Qdt$, $v = \sqrt{2g(A\text{-}x)}$; e però sarà $V : v : \sqrt{H} : \sqrt{(H-x)}$.

Siano a, b le coordinate del punto T, e T il tempo che il proietto impiega per giungere in T. Si avrà dalla prima dell' equazioni (1)

$$T = \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}.$$

Dippiù il tempo, che impiega il grave a calar per l'ascissa a è benanche $\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$.

Infine il tempo, che impiega il mobile a percorrere b equabilmente colla velocità $\sqrt{2gH}$, si ottiene dividendo lo spazio b per la velocità $\sqrt{2gH}$, e però sarà

» nella metà di SO. E dimostrando nella stessa guisa,
» che l'altro settore parabolico SCO pareggi il rettan-
» golo di CM nella metà della medesima SO; saranno
» i due settori SCO, STO nella ragione di CM a TN:
» onde sarà convertendo il settore SCO all'altro SCT,
» cioè il tempo per CO al tempo per CT (284), come
» CM a $CM—NT$, cioè (compiti i parallelogrammi
» $MOKC$, $NOKL$) come KO ad LT. Or per esser
» simili fra loro i due triangoli OKG, TLB sta KO:
» LT :: OG : TB: dunque sarà il tempo per CO a quel-
» lo per CT, come OG a TB.

» Suppongasi impertanto esser l'archetto Ct infini-
» tesimo, e si ordini tb al diametro CG; saran pure
» tb, TB semiordinate di questo nella ragion de' tem-
» pi, onde il proietto percorre gli archi parabolici Ct,
» CT. E quindi siccome le rette tb, TB sono come
» i tempi (11), nei quali sarebbon esse descritte equa-
» bilmente colla velocità di proiezione; così questi tempi
» son come quelli, nei quali si conduce il proietto
» per gli archi Ct, CT. Ma tanto tempo ei ne im-
» piega a trascorrer l'archetto Ct, quanto nel girne
» equabilmente nella tb colla velocità di proiezione (1):
» dunque anche il tempo per CT sarà uguale a quello,
» che ci vorrebbe affinchè un corpo equabilmente e colla
» velocità di proiezione descrivesse la semiordinata TB.

» Part. II. Le ascisse Cb, CB della parabola CTO
» sono in duplicata ragione delle loro semiordinate bt,
» BT (2) cioè (Part. 1.) de' tempi, in che il proietto
» descrive gli archi parabolici Ct, CT. Ma le mede-
» sime rette Cb, CB sono anche in ragione duplica-
» ta dei tempi, nei quali un grave cadente le descri-
» verebbe (153. n. 1.): dunque saranno quei tempi
» come questi. Laonde siccome il tempo della di-
» scesa libera del proietto per Cb è uguale a quel-
» lo ch'ei v'impiega a descriver l'archetto Ct; così
» il tempo per l'arco CT sarà uguale a quello, che

(1) Vedi la dim. della Prop. LIV.
(2) Prop. 7. Lib. I. Con. Giann.

$$\frac{b}{\sqrt{2gH}} = \frac{\sqrt{4Ha}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{2a}{g}} = T;$$

dunque ec.

Lemma. Riferiamo (*fig.* 7.) la traiettoria alle coordinate rettangolari $CP = z$, $PT = u$. Sia l'angolo di elevazione $XCP = f$. Condotta l'orizzontale BR, che incontri in R la TP prolungata, sarà

$$TR = BT\,sen.f,\; BR = BT\,cos.f \quad \text{o sia}$$

$$u + x = y\,sen.f,\; z = y\,cos.f.$$

Quindi $u = z$ tang. $f - x$. Dippiù, sostituendo nell'equazione $y^2 = 4Hx$ ad y il suo valore in funzione di z, si avrà $x = \frac{z^2}{4H\,cos.f^2}$, e perciò

$$u = z\,tang.f - \frac{z^2}{4H cos.f^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

» vi porrebbe un grave a calar verticalmente per la
» di lui ascissa *CB. C.B.D.*

» §. 356. Cor. 1. Da quello che si è recato in
» questa dimostrazione può inferirsene di leggieri,
» che, condotta la verticale *TP* sull'orizzontale *CA*,
» i tempi, nei quali un proietto trascorre gli archi
» parabolici *CT*, *TO*, sien come le rette *CP*,
» *PM*. E quindi se la stessa *CA* dividasi nelle parti
» uguali *CP*, *PM*, *MU*, *VA* ec, e pei punti delle
» divisioni si ergano delle verticali *PT*, *MO*, *VD*,
» ec.; saranno gli archi parabolici *CT*, *TO*, *OD*,
» *DA*, ec. descritti in tempi uguali.

§. 357. Cor. II. Dunque *sarebbe un corpo, che si lanci dalla nostra terra, non vada equabilmente pel suo sentiero parabolico; pur non di meno in tempi uguali passa al di sopra di uguali parti dell'orizzontale condotta dal luogo della proiezione.*

Si trascurano le definizioni.

§. 362. *L'ampiezza della parabola, la velocità iniziale, e l'angolo di elevazione, hanno un tal nesso fra loro, che ciascuna di esse può dalle altre due agevolmente rilevarsi.*

» Dim. Un grave proiettato dal luogo *A* (fig. 6) per
» la direzione *AT* descriva la parabola *AMO*. La ret-
» ta *BA* sia l'altezza dovuta alla velocità iniziale,
» l'angolo *PAT* sia quello di elevazione, l'altro *BAT*
» di proiezione, ed *AO* l'ampiezza della parabola *AMO*.
» Si tiri la retta *FA* dal fuoco *F* di questa curva al
» luogo della proiezione, e si calino *FH*, *FP* rispet-
» tivamente perpendicolari sulle rette *BA*, *AO*. Sarà
» la retta *FH* uguale alla *PA*, cioè ad un mezzo del-
» l'ampiezza *AO* della parabola; e s'intenderà dai
» conici (1), che il ramo *FA* sia quanto la *BA* altezza

(1) Prop. Lib. 1. Con. Giann.

Il tempo impiegato dal mobile a descrivere l' arco parabolico corrispondente ad x è $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ ovvero $\frac{z}{cos. f\sqrt{2gH}}$, e perciò è come l'ascissa orizzontale z. Laonde benchè il movimento del proietto nella sua orbita non sia equabile, pure non di meno il movimento della sua proiezione sull'orizzonte riesce equabile.

Se si fa nell' equazione (2) $u=o$, si avrà per l' ampiezza A del tiro

$$A=2H\ sen.2f; \quad \ldots \quad (3)$$

e però ciascuna delle quantità A, H; f è funzione delle altre due.

Chiamando ϕ l' angolo di proiezione, si avrà

$$f=90°-\phi,\ e\ \ sen.2f=sen.\ 2\ \phi\ ;$$

e perciò $A=2H\ sen.2\ \phi$ ovvero $\frac{1}{2}\ A=H\ sen.2\ \phi$.

Laonde la relazione ch' esiste tra $\frac{1}{2}\ A$, H e $2\ \phi$ è quella stessa ch' esiste nel trangolo rettangolo avente

» dovuta alla velocità di proiezione, e che l'angolo
» *FAB* sia duplo dell'angolo di proiezione *TAB*. Per la
» qual cosa siccome il cateto *FH*, l'ipotenusa *FA*,
» e l'angolo acuto *FAH* sono tre parti del triangolo
» rettangolo *FAH*, da due delle quali può sempre l'al-
» tra rilevarsi; così l'ampiezza della parabola, la ve-
» locità iniziale, e l'angolo di elevazione, ch'è com-
» plemento di quello della proiezione, hanno tal nesso
» fra loro, che ciascuna di esse può agevolmente dalle
» altre due rilevarsi. *C. B. D.*

» §. 363. Def. Quel triangolo rettangolo, che ha
» per ipotenusa l'altezza dovuta alla velocità di proie-
» zione, per un de' suoi cateti la metà dell' ampiez-
» za della parabola, e l'angolo acuto, che sottende
» tal cateto, è duplo dell'angolo di proiezione, può
» chiamarsi *Triangolo Balistico.*

§. 364. Cor. 1. Dai punti *M*, e *B* conduconsi le rette *MG*, *BQ* parallele alla *FH*; sarà *BG* uguale a *GH* com'è *QM* uguale ad *FM* (1). Dunque *AG* è media aritmetica tra *BA*, ed *AH*.

§. 365. Cor II. Vale a dire *l'altezza massima, cui ascende il proietto, è semisomma dell' altezza dovuta alla velocità iniziale, e del rimanente cateto del triangolo balistico.*

» §. 366. Cor. III. Congiunta la *BF*, sarà *BT*:
» *TF* : : *BG*: *GH*, e quindi *BT* uguale a *TF*. Dun-
» que i due triangoli *ATB*, *ATF*, che ànno le con-
» dizioni della 8. *El.* I. dovranno avere uguali gli
» angoli *ATB*, *ATF*, ed esser rettangoli. Laonde per
» la proposizione 8. *El. VI.* sarà *AB* : *AT* :: *AT* :
AG : e quindi $AB : AG :: AB^2 : AT^2$.

§. 367. Cor. IV. *L'altezza dovuta alla velocità iniziale sta alla massima altezza, cui ascende il proietto in duplicata ragione del raggio al coseno dell' angolo di proiezione.*

---

(1) Cor. 1. def. 8. Con. Giannat.

H per ipotenusa, $\frac{1}{2} H$ per un de'suoi cateti, e 2ϕ per l'angolo, che sottende tal cateto. Questo triangolo dicesi *balistico*.

Sostituendo nell' equazione (2) l' ascissa $\frac{1}{2} A = H$ $sen.\ 2f = 2H\ sen.f\ cos.f$, si avrà per l' altezza massima L, cui ascende il proietto

$$L = H\ sen.f^2 = H\ cos.\ \phi^2. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ora essendo $cos.\phi^2 = \frac{1 + cos.2\ \phi,}{2}$, ... (*)

si avrà sostituendo

$$L = H \frac{(1 + cos.2\phi)}{2} = \frac{H}{2} + \frac{H\ cos.2\phi}{2};$$

ma $\frac{1}{2} H\ cos.2\phi$ è il rimanente cateto del triangolo balistico; dunque ec.

Essendo $L = H\ cos.\ \phi^2$, sarà $L : H :: 1 : cos.\ \phi^2$.

(*) Legendre, Trigonométrie n. XX.

§. 368. Prop. *Poste le medesime cose della precedente proposizione l'ampiezza della parabola è quanto l'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel doppio seno del doppio angolo di proiezione.*
E l'altezza massima, cui ascende il proietto, adegua l'altezza dovuta alla velocità iniziale moltiplicata pel quadrato del coseno dell'angolo di proiezione.

» Dim. Part. 1. Nel triangolo balistico *FAH*, (ove
» il cateto *FH* dinoti la metà dell'ampiezza della pa-
» rabola, l'angolo *FAH* il duplo di quello della
» proiezione (363), ed *FA* l'altezza dovuta alla ve-
» locità iniziale), sta *FH* ad *FA*, come il seno
» dell'angolo *FAH* al raggio, che si ponga 1. Dun-
» que sarà *FH* uguale alla *FA* moltiplicata pel seno
» di *FAH*: e quindi prendendo i doppj, sarà *AO*,
» cioè l'ampiezza della parabola, uguale all'altezza
» dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel dop-
» pio seno di *FAH*, ch'è duplo dell'angolo di proie-
» zione.

» Part. II. E poichè (367) l'altezza massima, cui
» ascende il proietto, sta all'altezza dovuta alla ve-
» locità iniziale, come il quadrato del coseno dell'an-
» golo di proiezione al quadrato del raggio; sarà
» l'altezza massima del proietto uguale all'altezza
» dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel qua-
» drato del coseno dell'angolo di proiezione. *C.B.D.*

§. 369 Cor 1. Dunque *le ampiezze delle parabole, che descrivonsi da' gravi lanciati con eguali velocità di proiezione, sono fra di loro come i seni de' doppj angoli di proiezione. E le altezze massime, alle quali ascendon cotesti gravi, sono in duplicata ragione de' coseni degli angoli di proiezione.*

» §. 370. Cor. 11. Suppongasi esser semiretto
» l'angolo *BAT* di proiezione; il fuoco della para-
» bola, che descrive il proietto, dovrà cadere nel
» punto medio della di lei ampiezza, cioè in *P*. *E*
» dovrà in tal caso, come appare da'conici, esser *AP*

Google

La prima parte risulta dall' equazione (3), la seconda dall' equazione (4).

Si scorge ciò dall' equazioni (3) e (4).

Allorchè $\phi = 45^\circ$, *sen.*$2\,\phi = 1$, e *cos.*$\,\phi^2 = \frac{1}{2}$, si avrà

$A = 2\,H$ *sen.*$2\,\phi = 2\,H$, ed $L = H$ *cos.*$\,\phi^2 = \frac{1}{2}\,H$, e per-

» metà di *AO*, ed *MP* di *AP*. Dunque *l'ampiezza della parabola descritta da un corpo lanciato sotto l'angolo semiretto, l'altezza dovuta alla velocità iniziale, e la massima altezza, cui ascende il proietto, sono come 4, 2, 1.*

Segue uno scolio relativo al modo pratico di calcolare l'altezza dovuta alla velocità iniziale, che si tralascia.

§. 372. Prop. *Di tutte le parabole, che descrivonsi dai gravi proiettati con velocità uguali, e con diverse elevazioni, quella terrà la massima ampiezza, che ha semiretto l'angolo di elevazione.*

E saranno uguali le ampiezze di due parabole descritte dai gravi proiettati con velocità uguali, se i loro angoli di proiezione sieno equidifferenti dal semiretto.

» Dim. Part. 1. Essendo semiretto l'angolo di
» elevazione, e con ciò anche quello di proiezione;
» il duplo di questo sarà retto, ed avrà il massimo
» seno. Dunque l'ampiezza della parabola descritta
» coll'angolo semiretto d'elevazione sarà la massima
» in parità di altre circostanze (369).

» Part. 11. I due angoli di proiezione *BAT*, *BAt*
» differiscono ugualmente dal semiretto, quello però
» per difetto, questo per eccesso; i loro doppj do-
» vran pure differire ugualmento dal retto, ed avran-
» no uguali seni. Dunque le ampiezze delle parabole
» descritte coi mentovati angoli di proiezione, e con
» pari velocità iniziali, essendo nella ragione de'seni
» di questi angoli (369), saranno tra loro uguali.
» *C. B. D.*

» §. 373. Cor. 1. Sia l'angolo *BAT* di 15°, e l'al-
» tro *BAt* di 75°, i quali angoli sono dal semiretto
» equidifferenti; saranno uguali le ampiezze delle pa-
» rabole, che con questi angoli di proiezione, e
» con eguali velocità iniziali descrivonsi dai proietti.

» §. 374. Cor. 11. Ma poichè il duplo di *BAT* è
» in tal caso di 30°, il di cui seno è una metà del
» raggio; sarà l'ampiezza della parabola descritta da

Digitized by Google

ciò starà

$$A : H : L :: 2H : H : \frac{1}{2} H :: 4 : 2 : 1.$$

Il valore $A = 2H sen. 2f$ diventa massimo, quando $f = 45°$.

Perchè $sen. 2 (45° - \partial) = sen. 2 (45° + \partial)$.

Facendo $f = 15°$, si avrà $A = 2H sen. 30° = H$.

» un corpo, che avventasi sotto l'angolo di proiezione
» di 15°, o di 75°, uguale all'altezza dovuta alla ve-
» locità iniziale ».

§. 375. Pr. *Data la velocità iniziale, e lo scopo I (fig. 9), che vuol ferirsi dal luogo* A, *ritrovare il convenevole angolo di proiezione.*

« Costr. Sia *RA* l'altezza dovuta alla velocità ini-
» ziale, *AI* la retta, che unisce il luogo della proie-
» zione con quello del bersaglio, ed *AG* sia perpen-
» dicolare ad *AI*. Ciò posto 1. si bisechi in *C* la li-
» nea della velocità, di dove le si erga la perpendi-
» colare *CG*, che incontri in *G* la retta *AG*. 2. Col
» centro *G* intervallo *AG* si descriva il circolo *APQR*.
» 3. Si tagli *AB* quarta parte di *AI*, e per *B* si con-
» duca *BQ* parallela ad *RA*.

» Se questa non incontri il circolo di già descritto;
» il problema sarà impossibile, cioè la velocità di pro-
» iezione non sarà sufficiente per condurre il pro-
» ietto dal luogo A nell'altro *I*. E se tal retta in-
» contri il circolo ne' punti *P*, e *Q*; congiunte le ret-
» te *AP*, *AQ*, *gli angoli RAP*, *RAQ saranno quelli*
» *della proiezione*.

» Dim. Si distenda la retta *AP*, in sin che incon-
» tri la *IF* condotta per *I* parallela ad *AR*, e si com-
» pia parallelogrammo *AFIT*. E poichè l'angolo *PAB*
» è uguale a *PRA* (1), e son poi tra se uguali gli
» angoli alterni *APB*, *PAR* delle parallele *PB*, *RA*;
» sarà il triangolo *APR* equiangolo, e con ciò simi-
» le al triangolo *APB*, o all'altro *AFI*. E quindi
» starà *RA* : *AP* : : *AF* : *FI*, e 'l rettangolo di *RA*
» in *FI* pareggerà quello di *AP* in *AF*. Dunque pren-
» dendo i loro quadrupli sarà 4*RA* in *FI*, o in *AT*
» uguale al quadrato di *FA*, o di *TI* : imperciocchè
» essendo dalla costruzione *AB* quarta parte di *AI*,

---

(1) Prop. 32. El. III.

Sostituendo nell' equazione della traiettoria le coordinate a, b in vece di x ed u, e ponendo in essa $1 + tang. f^2$ in vece di $\frac{1}{cos. f^2}$, si avrà, risolvendola per rapporto a $tang. f$,

$$tang.\ f = \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 - 4bH - a^2}}{a}.$$

Siffatto valore mostra che si può ferire lo scopo con due tiri, e che il problema divien impossibile, allorchè $4H^2 < 4bH + a^2$.

» l'è pure AP quarta parte di AF ; e con ciò AF in
» $4AP$ è lo stesso, che AF^2, o TI^2. Ma la parabo-
» la descritta dal corpo A lanciato per AP colla velo-
» cità dovuta all' altezza RA tien per parametro di
» AT il quadruplo di essa altezza, le sue ordinate
» son parallele ad AP, e le ascisse son le parti del-
» la verticale TA. Dunque essendosi mostrato essere il
» quadrato di TI uguale al rettangolo di AT in $4AR$,
» fia mestiere, che TI sia una semiordinata della cur-
» va del proietto, e che questa passi per lo scopo I.
» In simil modo proverassi, che il corpo A, qualor
» si proietti colla medesima velocità per l'altra dire-
» zione AQ, ancor ne debba pervenire allo scopo I,
» sebbene per un' altra parabola $C.B.D.$ »

Non tiriamo più innanzi questo parallello per non abusarci della pazienza del lettore. Le cose fin qui esposte sono sufficienti a mostraro che la trattazione delle quistioni meccaniche colla sintesi riesce lunga e penosa, e che non potrebbe oggigiorno adottarsi senza discapito di tempo e fatica.

19. Ci restano qui a fare due importanti osservazioni, che formano lo scopo principale, per cui si è recato questo confronto. La prima si è che quel che più importa nella teorica dei proietti è la ricerca della curva descritta dai proietti nell' aria, perchè da questa sola l'arte balistica può trarre profitto. Disgraziatamente gli antichi con le loro *luminosissime ragioni* non possono guidare il nostro Fergola in questa delicatissima ricerca, la quale conduce ad una equazione differenziale di terz' ordine : egli quindi, tuttochè non coltivatore della moderna analisi, come appare da diversi luoghi del suo Trattato Analitico delle Sezioni Coniche, a questa ricorre per rinvenire la detta equazione differenziale (1). Or non è questo confessare co' fatti la superiorità dell' analisi sulla sintesi, che si ne-

(1) Fergola, Prelezioni sui Principj matematici del Newton Tom. II. Scienza dei Fluidi, n.° 218.

ga poi colle parole? Se superiore, perchè disprezzarla, o non darle la preferenza?

20. La seconda osservazione è che per seguire nel confronto fatto l' ordine delle proposizioni dell'Autore siamo andati più per le lunghe. È certo che tutta la teorica testè trascritta vien esposta dal Venturoli con tutta eleganza, precisione, e più estesamente coll' analisi a due coordinate in due pagine e mezzo, mentre occupa dodici pagine della Meccanica del Fergola: di maniera che andando con questa stessa proporzione le 733 pagine della Meccanica del Fergola appena corrispondono a 146 delle 800 pagine della Meccanica del Venturoli. Da ciò emerge naturalmente che le cognizioni meccaniche contenute nella prima non giungono ad un quinto di quelle contenute nella seconda; ma ai tempi voluti felici delle matematiche, nei quali era in vigore in Napoli l' antico geometrizzare, si studiava la prima, o quella del Caravelli la quale è a questa molto inferiore, oggigiorno si studia la seconda; dunque oggigiorno i giovani posseggono più di cinque volte più cognizioni meccaniche di prima. Per la qual cosa il sostenere che le matematiche abbiano deteriorato presso di noi è sostenere che cinque sia minore di uno, salvo che per cognizioni matematiche i signori Sintetici non intendessero che la semplice conoscenza degli Elementi di Euclide.

21. Giacchè abbiamo per le mani la Meccanica del Fergola, non possiamo non osservare che alcuni suoi discepoli leggano questo libro con quella specie di rispetto e venerazione, con che i Pitagorici leggevano le opinioni del loro Maestro (1). Essi sono ben lungi dal sospettare in esso, non diciamo errori, ma neppure nei, e però giurando *in verba magistri* non lo assoggettano a quella critica disinvolta, propria degli scienziati. Passiamo a dare una pruova della nostra asserzione colla soluzione del seguente

Prob. Trovare la spinta orizzontale della trave AB (*fig. 10.*) appoggiata al muro verticale AD, e ritenuta in B da un ostacolo, che la impedisce di scorrere lungo DB.

Sia P il peso della trave, a, b le distanze AC, CB degli estremi di essa al suo centro di gravità C, φ l'angolo DAB, X la spinta orizzontale sul muro verticale AD, ed x la spinta orizzontale sull' ostacolo B.

Supponendo libera la trave da qualunque impedimento, e rivolgendo in senso contrario le forze, che agiscono su di essa, è chiaro che non potrebbe sussistere l' equilibrio se le spinte orizzontali non si distruggessero scambievolmente, e quindi se X non fosse uguale ad x.

Il sig. Fergola, risolvendo lo stesso problema, trova che

$$X : x :: b : a + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Affinchè poi la trave non si aggiri intorno a B, è necessario che il momento della spinta orizzontale $AD \times X$ sia eguale al momento $P \times EB$ del peso del-

(1) I Pitagorici riposavano tanto sulle opinioni del loro Maestro, che a qualunque obiezione, che loro veniva fatta, rispondevano: *il Maestro l'ha detto.* Questo sacrifizio di volontà avverte saviamente lo storico Rollin dee farsi alla sola Divinità. *Rollin, storia antica, lib. 7.*

(2) Prelezioni sui Principj Matematici del Newton. Statica, n.° 221.

Digitized by Google

la trave, che tende a rivolgerla in senso contrario. Laonde sarà

$$X.\,AD = P.\,EB\,,$$

donde $X = P.\,\frac{EB}{AD} = P\,\frac{b}{a+b}\,tang.\,\varphi$,

sostituendo ad EB, e AD i loro valori espressi in funzione di a, b, φ.

Il sig. Fergola ottiene per X

$$P\,\frac{b}{2\,(a+b)}\,sen.\,2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dal valore di X o $x = P\,\frac{b}{a+b}\,tang.\,\varphi$ testè trovato si deduce che la spinta cresce indefinitamente, e che diventa infinita quando $\varphi = 90°$, e che quindi il valore di X non ammette *maximum*.

Il Signor Fergola trova questo *maximum*, quando $\varphi = 45°$ (2).

Errata la soluzione dell'esposto problema (3) il Sig. Fergola ne deduce sette falsi corollari, nel sesto dei quali fa *intendere per iscienza, di che valore sieno le spinte orizzontali fatte da certi corpi appoggiati ai muri, (come sono i Tetti degli Edifizii, i puntelli delle pareti rovinanti, ed altri simili corpi), e quanto le loro pressioni verticali*, e nel settimo dà le regole *per calcolare la consistenza de' Tetti, qualunque siane la loro figura, e grandezza, e valutare quella forza, ond' essi ne spingono le rispettive imposte del piè diritto* (4).

---

(1) Prelezioni sui principj matematici del Newton. Statica, n.° 217.

(2) Idem, n.° 218.

(3) L'errore del Fergola è nella decomposizione del peso della trave.

(4) Idem, n.° 122, 124.

Fa maraviglia certo che il Sig. Fergola non abbia posto mente a quel fenomeno che tutto dì colpisce i nostri occhi, ossia che quello attrito sufficiente a mantenere inclinata ad un muro verticale sotto un dato angolo una scala, una trave, un bastone, ecc. non lo è più, qualora questi oggetti s' inclinano alla verticale sotto un angolo maggiore; e che tanto più tendano a scorrere con violenza lungo il suolo quanto più questo angolo è maggiore. Arreca però più maraviglia, come taluni suoi discepoli, non leggendo la soluzione dell'esposto problema nel Navier (1), e nel Venturoli (2), e giurando nelle parole del loro Maestro, giungessero fino a proporre nell' esame di ammissione all'*Album* degli architetti la quistione:

Trovare la massima spinta di una trave appoggiata ad un muro verticale con uno estremo, essendo l'altro ritenuto da un ostacolo invincibile.

Ci saremmo volentieri astenuti dal recare qui l'esposto problema sulla trave, se alcuni della scuola del Fergola troppo prevenuti pel loro maestro non fossero giunti a preferire nell' insegnamento gli elementi di Meccanica di questo Geometra a quelli tanto conosciuti del Venturoli. Ma ci riserbiamo il capitolo seguente per mostrare fin dove la scuola del Fergola spinse la prevenzione pel suo Maestro.

---

(1) Résumé des Leçons données à l' École des Ponts et Chaussées, n.° 420.

(2) Meccanica Tom. 1. n.° 143.

CAP. V.

Matto Elogio del signor Fergola scritto da un suo discepolo anonimo. Questo discepolo non fa onore alla scuola del Fergola. Si trascrivono diversi tratti di questo elogio. Il Fergola vien posto innanzi a' più grandi geometri della terra. S' inveisce contro i primi propagatori de' metodi analitici nel Regno delle due Sicilie. Bestemmie profferite contro l' analisi cartesiana, e la Geometria a due e tre coordinate. Maniera di ragionare di questo Sintetico.

22. Se tutti i discepoli usciti dalla scuola dell' illustre Fergola fossero dello stesso polso del discepolo anonimo, che ne ha scritto l' elogio, il Fergola avrebbe avuta la stessa sorte del grande Michelangelo Bonaroti, il quale benchè avesse usata tutta l' amorevole attenzione verso i suoi allievi, pure non ebbe in tutto il corso di sua lunga vita il piacere d' imbattersi in alcuno, che fosse degno del suo gran nome (1). Per mostrare intanto che cotesto panegirista del Sig. Fergola non sia degno discepolo di un sì rinomato maestro, noi non abbiamo bisogno di ragionamenti, ma solo di trascrivere alcuni tratti del suo elogio, da' quali il lettore lungi da poter arguire il merito, noto per altro, del Fergola; non ne arguisce che la crassa ignoranza del suo panegirista unita alla sua eccedente arditezza.

23. Parlando costui di quel Leibinitz, che fu l' inventore del calcolo differenziale, che fu rivale dello stesso Newton, che *tastò il polso agl' Inglesi*, dice:

« Altro non offerirono gli sforzi suoi che part' in-
» formi e difettosi, e quella sete, che la sua speran-
» za nudriva, crudel si rimase, senza aver potuto
» egli di per se o per altri almeno una sola volta ca-
» varsela (2) ».

(1) Milizia, Memorie degli Architetti. Vita di Michelangelo Bonaroti.

(2) Elogio di Niccolò Fergola scritto da un suo discepolo, pag. 67.

e più sotto soggiugnendo dice :

« Ma se l'ardito autor delle Monadi, e delle quali
» formò il Mondo a sua voglia e che sono *les Vies*,
» *les Ames*, *les Esprits qui peuvent dire « Moi »* mo-
» rì senza che conoscesse l'analisi geometrica ed il
» modo di comporre i Problemi di Posizione e di Si-
» to ; Fergola al contrario rivolgendo seco proposte
» così difficili » ecc. (1).

Della *Théorie des fonctions analytiques* dell' immortale Lagrange ha questa opinione :

« Oper'astrusa, nuova, sublim'e che in se conterreb-
» be, come immaginava seco, il suo autore *les prin-*
» *cipes du calcul différentiel, dégagés de toute considé-*
» *ration d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limi-*
» *tes ou des fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des*
» *quantités finies* se quello su cui è appoggiata non
» fosse incerto ed instabile alquanto (2) ».

Nella *Introduzione all' analisi degl' infiniti* del celebre Eulero trova delle serie *tetre e fosche*, che il Fergola liberò *da quell' aspetto torbido e chiuso d' oscuri nuvoli* ec. (3).

De' Signori Cousin, Clairaut, ed in generale di quasi tutti i geometri moderni francesi ed italiani dice :

« Non saprei dir la ragione perchè Cousin e quasi
» tutti i Francesi, adesso egualmente la Franco-Italia,
» quel vessillo seguendo alto levato dal loro condottie-
» re Clairaut, abbiano indiscretamente messo in non
» cale il precetto che Orazio in brevi motti intimò ai
» poeti non che, ma ad ognuno, che ami seguir le or-
» me che la sapienza segna con sano avviso ; cioè

Ordinis haec virtus erit, et Venus, (aut ego fallor)
Ut jam nunc dicat, jam nunc debentia dici
Pleraque differat, et praesens in tempus omittat (4).

Q. Horat. de Art. Poet. v. 42.

---

(1) Elogio di Niccolò Fergola, pag. 67.
(2) Idem, pag. 92.
(3) Idem, pag. 48.
(4) Idem, pag. 45.

Google

Questo precetto riguarda solamente i poeti, nè Orazio poteva sognare di darlo a'geometri.

In Cousin, Bossut, Lacroix trova vari e discordanti problemi:

« Il Fergola in vece di dar principio alla sua sen-
» sata instituzione con presentare in disordine varii
» e discordanti problemi per far intendere qual sia lo
» scopo che abbia l' Algebra in mira, e questo pri-
» ma che siasi detto con definizione precisa che cosa
» abbracci in se questa scienza, come hanno in usan-
» za Cousin, Bossut, S. F. Lacroix e gli altri ad-
» dottrinati autori dell' anno *IX.* *X.* *o* *XI.* della
» *R* . . . . il nostro Eroe per contrario ma-
» neggia tutto con nuova e singolar maestria, rimon-
» tando sempre dal più strigato e più facile al più
» avviluppato e difficile. Quindi qual maraviglia se i
» suoi discepoli divenissero in breve giudiziosi calco-
» latori, idonei altresì a disciorre con oculat' artifi-
» ciosità le quistioni più intrigate ed oscure (1) »?

Del Calcolo Differenziale ed Integrale del Lacroix, del Bossut, del Boncharlat dice:

« Libri senza fallo tessuti da valorosi analisti, così
» perfetti eziandio che starebbero agli stessi assai be-
» ne gli elogii coi quali potrebbe forse alcuno inal-
» zarli; pure pel metodo come si veggono orditi, mi spia-
» cerebbe assaissimo, se qualche caprigno satiro bor-
» bogliando pronunziasse di essi, per cumularli di pie-
» na laude, quei detti ».

Si foret in terris rideret Democritus; seu
Diversum confusa genus panthera camelo,
Sive elephas albus vulgi converteret ora.

Q. Orat L. II. Ep. I. v. 194.

« Perciò quando anche noi avessimo questi avuto in
» quegli anni, che rammemoro adesso, non avrebbe il
» Fergola fatto alcun' uso per l' indicata ragione; giac-
» chè solea di que' soltanto valersi, che la sapienza det-
» tò ed un maturo esame, questi porgea e non altri
» agli avventurati suoi allievi: che se i miei lamenti

(1) Elogio di Niccolò Fergola, pag. 46.

Digitized by Google

» sembrasssero biliosi alquanto ed acerbi a coloro che
» amano un pocolino i Francesi ritratterei quello che
» ho detto prima, discuserei sì fattamente l'intrigo,
» e la tenebrìa disgustosa, ch'è da per tutto in co-
» tali opuscoli, e che ad ogni passo arresta tutti quei
» che gli svolgono, aggiungendo, dico, che le defini-
» zioni, gli assiomi, i postulati, gli altri principii
» necessarii a preporsi, affinchè si possa sapere e in-
» tendere il rimanente, non vi si mostrano aperti e chia-
» ri; temendo forte che Velazé, Cochon, Grandpré,
» l'umano e galante Santerre non gli avessero ren-
» dut' in tutto noti e chiarissimi appendendoli capovol-
» ti a qualcuna di quelle alte lanterne, che folgorano
» di notte ed illuminano la sempre umida ed annuvo-
» lata Parigi (1) ». Che spirito!!!

Così sparla di tutte le istituzioni francesi:

« Quindi caddero in mano de' giovanetti mille e
» mille istituzioni, tali da fargli correr infallibilmen-
» te pericolo di guastarsi l'animo, apprendendo prin-
» cipii non buoni ed una maniera di raziocinare stra-
» na in tutto ed erronica. E per non dipartirmi dal
» mio soggetto, basterà sovvenirsi di quella *del Fran-
» coeur*, che ha il titolo *Cours Complet de Mathémati-
» ques Pures, dédié à S. M. Alexandre 1. Empereur de
» toutes les Roussies*, per intendere qual era di que' dì
» il nostro essere. Ho rammentato questa, essendo
» questa stata che più delle altre abbacinò la mag-
» gior parte de' maestri, sebbene sparsa da per tutto
» di abbagli gravi e perniciosi. Per ovviare al gran
» disordine, tosto che nel Novembre del 1806 il Fer-
» gola salì sulla Cattedra, cominciò a scrivere nuove
» e sfavillanti Istituzioni d'Algebra, di Calcolo subli-
» me, d'Arte Evristica: modelli della forma, colla
» quale dovrebbono tessersi cotali libri; forma che
» sconciata fu da'Francesi primieramente, di poi dagli
» Italiani, i quali perciò non più producono parti, ma
» isconciature (2) ».

---

(1) Elogio di Niccolò Fergola, pag. 49.
(2) Idem. pag. 91.

Digitized by Google

La ragione, per cui questo discepolo sparla in tal modo di Leibinitz, Lagrange, Eulero, Clairaut, Cousin, Lacroix, Bossut, Francoeur, si è quella di loro anteporre il suo maestro; ma ne anche si contenta di anteporlo a tutti i mentovati geometri, e

Non parendogli aver toccato il fondo

lo antepone allo stesso Newton, dicendo:

« Se dubitasse alcuno di quel che ho detto, contrappesi il metodo dal Fergola usato con quello messo in pratica dal Fermat, dal Vieta, dal Newton per rimaner convinto senza esitazione, che il geometra napoletano di tanto supera gli accennati stranieri, di quanto la bellezza dell' unico suo principio è al di sopra de' molti tra lor diversi e a' quali s' attennero i predetti geometri ed altri ancora per la medesima difficile impresa (1) ».

24. Molti professori Napolitani, fra i quali il chiarissimo professore D. Filippo Maria Guidi, cacciati in esilio, si ricoverarono in Parigi, ove ebbero la bella sorte di conversare con Lagrange, Laplace, Monge, Poisson, Lacroix, e tanti altri rinomatissimi analisti. Videro con loro cordoglio che mentre appo noi si dava il titolo di sommo Geometra a colui, che avesse saputo scindere da una parabola Apolloniana co' metodi del Geometri della Grecia una data area per mezzo di una retta assoggettata a passare per un dato punto (2); che mentre in Napoli non eravi alcuna scuola di Calcolo Differenziale ed Integrale, che mentre in Napoli s' ignorava finanche il nome di Geometria a due e tre coordinate, colà il genio de' mentovati Geometri sottoponeva tutte le leggi, onde natura governa la materia, al vasto impero dell' analisi, dando in tal modo alle matematiche quello altissimo scopo, per lo quale furono dal

(1) Elogio di Niccolò Fergola, pag. 99.

(2) Il Sig. Padula risolve questo stesso problema coll' analisi a due coordinate, e la sua soluzione è tale, da non lasciarne desiderare quella secondo i geometri della Grecia. Veggasi il VI. problema della sua Raccolta.

Google

Creatore all' uomo largite. Rimpatriati questi, colla fiaccola della moderna analisi, e colle opere dei sullodati analisti, le quali sono tanti Soli nel vasto firmamento matematico, si sforzarono di diradare quelle tenebre *tanto dense*, *che poteano palparsi*, e che per un radicato fanatismo per gli antichi, ingombravano il bel cielo di Napoli. Or tutti questi professori, a'quali Napoli dee saper molto grado, vengono così insultati da cotesto scolaro, il quale tutt'altro apprese dal moderatissimo e dottissimo suo maestro, fuorchè matematica e moderazione :

« Occorse, allora che dimoravano qui i Francesi,
» che alcuni i quali nel novantanove dello scorso se-
» colo cacciati in esilio, che per occasion così fatta
» soggiornando qualche mese in Parigi, videro forse
» due o tre fiate da lungi e col cannocchiale. La-
» grange, il Sig. Monge, Laplace; divisando seco,
» che gli sfavillanti occhi loro vibrassero raggi da
» illuminare le annuvolate menti di quei che li gua-
» tavano immobili e stupefatti! rimpatriati essi di nuo-
» vo incominciarono a borbogliare da prima, poi ad
» asserir con franchezza, che la scuola del Fergola
» disposta tutt' alla sintesi degli antichi, conosceva ben
» poco l' analisi de' moderni calcolatori. Volendo in-
» tanto l' Abate Giannattasio, il Sig. Flauti e qual-
» che altro di nostra scuola smentire la balorderia di
» tali detti coi fatti, determinarono di raccorre in-
» sieme le cose che dagli Allievi del Fergola si erano
» già messe in campo di prima e le altre che in quel
» momento fossero per venire innanzi a coloro che
» ascoltavano le importanti sue lezioni e 'l folleggiare
» altrui. Quindi i suddetti Giannattasio e Flauti tale
» assunto togliendo, si diedero il pensiero di fare im-
» primere in quaderni distinti » *gli Opuscoli Matematici della Scuola del Sig. D. Niccolò Fergola parte già pubblicati, e parte inediti* (1).

Gli opuscoli matematici della scuola del Fergola mostrano

---

(1) Elogio di Niccolò Fergola, pag. 103.

tutt' altro che la valentia del Fergola e della sua scuola nell' analisi moderna. L' altra ragione, che adduce questo discepolo, onde attestare la valentia del suo maestro nella geometria e due tre coordinate è più convincente, ed è la seguente:

« Com' esser può che alcuno dubiti, e non conceda,
» che il Fergola (grande per la perizia nella geome-
» tria, la quale usavano i Greci) grandissimo non fos-
» se ancora stato nell' analisi de' recenti calcolatori, e
» nell'arte di trasfonderla facilmente nell'animo de' sol-
» leciti suoi discepoli »?

Euclide, Archimede, Apollonio ecc. furono grandissimi nella Geometria degli antichi, dunque secondo questo discepolo grandissimi dovettero essere ancora nell' analisi moderna? Che han che fare poi le conoscenze matematiche con l'arte di saperle trasfondere nell' animo de' giovani?

25. Infervorandosi sempre più questo campione della scuola sintetica per gli antichi, si fa uscir di bocca a pag. 18. che l' analisi Cartesiana fu creduta utile ed attiva *sol perchè così piacque al Cartesio*; a pag. 106, chiama la Geometria a due e tre coordinate, per mezzo della quale i moderni hann' operato, ed operano tuttora portenti, *maludetta*, ed a pag. 107 l' appella *malafatta*.

26. La maniera poi di ragionare di questo sintetico è veramente singolare. Facendo egli sempre uso della bell' *arte di dimostrare, (di quell' arte*, dic' egli, *che le sole matematiche ispirano e che nella sola palestra de' matematici si ricovera)* asserisce delle proposizioni arditissime e falsissime, e quando il lettore si aspetta una dimostrazione qualunque, da Truffaldino o Scaramuccia gli scappa dalle mani con un passo (non sempre a proposito) o di Lucrezio, o di Virgilio, o d' Orazio, o d' Ovidio, o di un classico latino qualunque, e come se questo passo potesse tenere luogo di dimostrazione, ne cita l' autore, la pagina ed il verso.

Digitized by Google

CAP. VI.

Valentia del Sig. Scorza, e suo fanatismo per lo Stichiota. L'abate Condillac, e d'Alembert non compresero la definizione della linea retta di Euclide. La sola definizione della linea retta dello Stichiota è buona. La sola definizione dell'angolo dello Stichiota è buona. Sua ingiustizia verso i moderni geometri. Critica del Sig. d'Amante sulla dimostrazione del quinto postulato di Euclide del Sig. Scorza. Difficoltà, che presentano le definizioni del quinto libro di Euclide. Ragione, per la quale tutti i sintetici credono che questo libro non possa trattarsi coll'aritmetica. Gli Elementi di Geometria dei moderni e massime quelli del Legendre debbonsi preferire nell'insegnamento a quelli di Euclide.

27. S'ingannerebbe a partito colui, che volesse giudicare del merito della Scuola del Fergola dal discepolo anonimo, che ne à scritto il matto elogio, di cui si fece menzione nel capitolo precedente, dappoichè questa scuola ha dato Geometri, che onorano il nome del Fergola, Napoli, e forse tutta l'Italia. Uno di questi è certamente il valentissimo Geometra D. Giuseppe Scorza, di cui le scienze non cessano di deplorare la recente perdita. Or benchè sembri a prima vista che questo illustre Geometra non potesse avere nulla di comune col discepolo anonimo panegirista (perchè niente può avere di comune la dottrina colla ignoranza), pure questi due diversissimi discepoli hanno di comune il disprezzo per li moderni, e l'amore per gli antichi geometri, il quale degenera in fanatismo. Ed in vero il Sig. Scorza spinge tant'oltre il fanatismo per lo Stichiota, che lo risguarda come infallibile; e però se in esso trova qualche sconcio, ne accagiona o il tempo o qualche geometra imperito, che dopo averlo

adulterato, l' ha così a noi trasmesso. Quanti pregi ignoti a tutti ei trova nello Stichiota! Oh Dio quanti difetti ne' moderni geometri! Quanta dottrina in quello, quanta ignoranza in questi! L'Abate Condillac, d'Alembert, Wallis, Leibnitz, Borelli, Volfio, Clavio, Simson, Legendre, Lacroix, ecc. s'ingannano, o non hanno compreso lo Stichiota sempre e quando non si uniformano a lui, e dicono bene ed hanno compreso lo Stichiota sempre e quando vanno collo stesso d'accordo.

28. L'Abate Condillac nell'arte sua di ragionare asserisce che la linea retta, e la curva *son cose che non occorre pensare a voler definire*. Il sommo d'Alembert nella Enciclopedia lasciò detto, che *forse meglio sarebbe il non definire nè la linea curva, nè la linea retta, per la difficoltà, e forse impossibilità di ridurre queste parole ad una idea più elementare di quella che esse presentano da loro stesse*. Il Sig. Scorza non ha alcun ritegno di asserire che l'Abate Condillac, ed il sommo d'Alembert abbiano ciò detto per *non aver essi ben compresa la definizione che ne dà lo Stichiota* (1).

29. Tutte le definizioni della linea retta sono cattive secondo lo Scorza, eccetto quella di Euclide. Lo stesso Principe dei geometri mal definisce la linea retta per *la più breve di tutte le linee, che si possono distendere da un punto ad un altro*, poichè questa non è definizione, ma più tosto assioma ovvero sentenza, che discende dalla definizione Euclidea, *che racchiude la vera natura della linea retta* (2). Gli antichi dunque, come si arguisce dalla definizione di Archimede, e come riferisce lo stesso Scorza per bocca di Proclo, si discostarono dalla definizione Euclidea, definendo la linea retta per quella, *che si costituisce nei suoi estremi:* per quella, *che con un'altra della medesima specie non può formare figura, o sia non può chiudere spazio:* per quella, *ch' è la più breve di tutte le linee, che si possono*

(1) Euclide Vendicato, 2.a Ediz. pag. 6.
(2) Idem, pag. 11.

distendere da un punto ad un altro (1). Or domandiamo se qualunque definizione diversa da quella di Euclide è cattiva, e se gli antichi non ebbero difficoltà di definire diversamente la linea retta, perchè il Sig. Scorza ne va incolpando solamente i moderni geometri? Se il divino Archimede, e tanti altri vetusti geometri si discostarono dalla definizione Euclidea, perchè gli strali dello Scorza sono soltanto diretti contro i moderni? Se infine seguendo appuntino il divino Archimede e tanti tri vetusti geometri, i moderni si sono discostati dalla definizione Euclidea, perchè i soli moderni hanno diversamente definita la linea retta per aver poco compreso lo Stichiota? Perchè infine il P. Soave dovea rivolgere i suoi lamenti contro i moderni e non già contro gli antichi (2)?

30. Definendo il Legendre l'angolo per quella quantità per la quale i due lati sono distanti più o meno tra loro in riguardo alla loro posizione, mal lo definisce (3). Mal definisce l'angolo il Lacroix, che ha seguito il grande Apollonio e Proclo, dicendo essere lo spazio indefinito compreso da due linee (4). Male lo definisce chiunque non lo definisce, come lo Stichiota, o sia per l'*inclinazione*, *che nel piano hanno tra loro due linee*, *che scambievolmente si toccano e non son poste per diritto* o sia non formano una sola linea, perchè nella *inclinazione*, in cui il Lacroix ravvisa un sinonimo di angolo, e la maggior parte de' geometri un vôto,

---

(1) Euclide Vendicato, 2.ª Ediz. pag. 10.

(2) Idem, pag. 9. 10.

(3) La definizione dell'angolo del Legendre riportata dal Sig. Scorza è questa: l'angolo *è quella quantità per la quale i due lati sono distanti tra loro*; laddove la genuina è così espressa: *Lorsque deux lignes droites se rencontrent*, *la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre*, *quant à leur position*, *s'appelle* angle. Legendre, Éléments de Géométrie, édit. 12.

(4) Euclide Vendicato, pag. 21.

Digitized by Google

il Sig. Scorza scorge nientemeno quel *primum quod in re concipitur* (1).

L' angolo, dice lo Scorza in riguardo alla sua essenza, non è una *quantità*, come crede il Legendre; non è una *qualità*, come voleva Eudemo Peripatetico; non è infine una *relazione*. Cosa è dunque cotesto angolo? E qui sogginnge il Sig. Scorza che sebbene l' angolo non sia nè quantità, nè qualità, nè relazione, pure *risulta da tutti e tre questi predicamenti*, o sia *quantità, qualità* e *relazione* (2), che contengonsi a maraviglia nella misteriosa *inclinazione*.

31. Passiamo ai postulati: nel primo di essi Euclide suppone (come riflette il Sig. Scorza) che da un punto ad un altro si possa realmente tirare la linea retta, e sebbene egli non lo dimostri, pure il Sig. Scorza volentieri glielo *concede come una cosa possibile e molto facile a dimostrarsi*. Questa cosa possibile e molto facile a dimostrarsi è stata sbagliata, come ne fa sapere lo stesso Scorza d' alcuni moderni, e dallo stesso Gemino (3), e non è stata dimostrata, se non da lui solo, il quale scorge luce, ove gli altri non ravvisano che dense tenebre.

---

(1) Sebbene la voce *inclinazione* non susciti nella mente di chiunque si fa a meditarvi sopra senza prevenzione, se non quella idea o significazione, che ad essa assegna il Dizionario d' Alberti o sia *il torcere dalla rettitudine, o dal perpendicolo*, pure nella mente del Sig. Scorza sveglia un complesso d'idee, e nientemeno *quella relazione di sito, che hanno tra loro le linee, che scambievolmente si toccano e non son poste per dritto*. Stando alla significazione che il citato Dizionario affige alla voce *inclinazione*, pare che nell'angolo retto non siavi inclinazione alcuna, perchè non vi è torcimento dal perpendicolo o deviazione dalla perpendicolare. Se poi questa voce dovesse avere una significazione diversa da quella del Dizionario, i *Vendicatori, Restitutori, Illustratori, Comentatori, Annotatori* ecc. dello Stichiota sarebbero nell'obbligo di definire prima questa voce, e poi l' angolo.

(2) Euclide Ven. pag. 23.

(3) Idem, pag. 40.

Digitized by Google

Come nella definizione Euclidea della retta il Sig. Scorza trova chiara la dimostrazione del primo postulato, così vi trova la dimostrazione del secondo e del quarto, o sia che due rette non possono comprendere spazio alcuno. Infine il postulato, che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro, che viene generalmente dimostrato da' moderni, dal Sig. Scorza si scorge chiaro nella definizione degli angoli retti (1). Or domandiamo in buona coscienza se lo Stichiota avesse dimostrato che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro, e il Legendre ed altri moderni avessero posto questo teorema tra' postulati, il Sig. Scorza l' avrebbe loro menata buona? E non è questa la più manifesta ingiustizia verso i moderni?

32. Il quinto postulato di Euclide ha esercitato l'ingegno dei più famosi geometri, dacchè esiste la Geometria, e niuno è pervenuto ancora, come si sa, a darne una dimostrazione soddisfacente. I varî tentativi fatti da tanti geometri debbono farne sospettare con fondamento che lo stesso accuratissimo e rigorosissimo Euclide avesse tentato di dimostrarlo, e non riuscendovi l' avesse annoverato tra i postulati. Dacchè lo Scorza crede di aver dimostrato questo postulato, e non potendo supporlo dimostrabile e non dimostrato da Euclide, opina che anche Euclide l' avesse dimostrato, e che la rapacità del tempo (al quale si attribuiscono dai Sintetici più furti di quelli che ha realmente commessi) non ne abbia a noi trasmessa la dimostrazione (2). La dimostrazione però del Sig. Scorza creduta ottima da' Sintetici, approvata dall' Accademia Reale delle Scienze di Napoli, non va esente da tutti quei difetti, che porta seco la considerazione dell'infinito, come con molto acume di critica ha fatto marcare il ch. professore d' Amante. Crediamo di far cosa grata al lettore trascrivendo quì le dotte osservazioni del prelo-

(1) Euclide Vendicato, pag. 40.
(2) Idem, pag. 44.

dato geometra per mostrare che lo scandalo o neo delle parallele non è stato tolto dalla Geometria.

« Data una retta indefinita AB (Fig. 11.) ed un
» punto fuori di essa H , se per questo punto si con-
» duca un'altra retta indefinita H L, la quale si fac-
» cia girare circolarmente intorno ad H, è chiaro che
» una tal retta nel suo movimento prenderà infinite
» posizioni diverse rispetto alla retta fissa A B. Fra
» tutte queste posizioni ve n' ha una H K in cui
» la retta mobile diviene parallela alla A B ; si vuol
» dimostrare che allontanandosi la retta mobile da quel-
» la unica posizione con accostarsi alla A B , deve
» necessariamente incontrarla.

» Il signor Scorza nella sua dimostrazione non fa
» che studiare la posizione che deve prendere la ret-
» ta mobile HL per incontrare *la prima volta* la retta
» fissa , affine di conchiudere che ciò deve accadere
» appena che la retta circolante si allontana dalla pa-
» rallela H K , movendosi verso B. Ora , partendo dal-
» l' idea di questo *primo incontro* fu immaginata moltis-
» simi anni indietro dal signor Gergonne una sem-
» plicissima dimostrazione del postulato V , la quale
» sottoposta al giudizio di Legendre , si vide chiara-
» mente che poggiava in falso , poichè ragionare su
» quel primo incontro come se fosse presente, mentre
» accade a distanza *infinita* dal punto H , significa sna-
» turare la quistione , ed un tal procedimento non può
» menare a buon fine. La dimostrazione di Gergonne
» fallì dnnque nella opinione di tutti i geometri , e
» dello stesso suo autore , nè se ne parlò più. Il no-
» stro onorevole concittadino riproduce dopo lunghi an-
» ni l' idea pel primo incontro , e crede di avva-
» lorarla con una distinzione , la quale permettendo-
» gli di argomentare per esclusione , lo condurrebbe,
» secondo lui , al desiderato intento. Egli immagina
» che il *primo incontro* possa accadere o quando la ret-
» ta mobile H L faccia con la parallela H K un ango-
» lo *determinato* , o quando faccia con essa un angolo
» *indeterminato* ; cioè maggiore o minore di qualunque
» angolo *dato*. Dimostra facilmente che il primo in-

» contro non può accadere quando l' angolo D H K è
» *determinato* , ossia dato , e questa medesima dimostra-
» zione serve a provare che il voluto primo incontro
» non è *primo* , non *secondo*, non *terzo* , etc., ma che
» il primo incontro non si può assegnare a distanza
» *finita*. Qui avrebbero dovuto aver termine le specu-
» lazioni del professore Scorza, poichè se il primo in-
» contro è a *distanza infinita* , come si fa a traspor-
» tarvi le costruzioni ed i ragionamenti della geome-
» tria ? Nulladimeno continuando , l' autore preten-
» de di dimostrare che il primo incontro non può ac-
» cadere quando l' angolo della retta circolante con la
» parallela è maggiore di un angolo dato M H K , ciò
» che in altri termini significa , che non può esservi
» un angolo finito M H K entro il quale le rette con-
» dotte dal punto H non incontrano la retta A B , ed
» oltre il quale la cominciano ad incontrare. Seguendo
» attentamente il ch. autore nel suo ragionamento si
» vede che il nodo della dimostrazione consiste nel
» voler rinchiudere un angolo *dato* nell' angolo R Q P
» formato dal prolungamento di P H , e dalla congiun-
» gente un punto qualunque R della retta A B col pun-
» to Q. Ora noi faremo osservare al signor Scorza che,
» avendo egli dimostrato nella prima parte del suo
» *Lemma* che il primo incontro deve accadere a di-
» stanza *infinita* da un dato punto G , gli angoli G M H ,
» G N H , G B H etc , che la retta A B fa con tutte
» le infinite rette che la incontrano, vanno continua-
» mente diminuendo all' infinito, e però il contraddditto-
» re sostiene, e sostiene benissimo , che l' angolo RPH,
» supposto del primo incontro nella seconda parte del-
» la proposizione , è minore di qualunque angolo da-
» to. Laonde nel triangolo R Q P (quando potesse sus-
» sistere) l' angolo esterno R P H essendo maggiore
» dell' opposto R Q P , a maggior ragione quest' ulti-
» mo sarebbe minore di qualunque dato , e non vi si
» potrebbe in alcun modo rinchiudere un angolo dato.
» Abbiamo detto che il contraddittore sostiene benis-
» simo che l' angolo del primo incontro è minore di
» qualunque dato , perchè ognun sa che la cosa sta

» così effettivamente : l' angolo R P H, è eguale al suo
» alterno P H K, ed è noto che il primo incontro av-
» viene appena che la retta circolante abbandona la pa-
» rallela H K, ossia quando fa con essa un angolo mino-
» re di qualunque dato. Intanto il professore Scorza vo-
» lendo richiamare sotto i suoi occhi ciò che accadeva a
» distanza infinita da lui, è stato indotto in errore dall'os-
» servare che l'angolo RQP, esclusa la considerazione
» dell' infinito, può crescere continuamente ad arbi-
» trio del geometra — Ma v' ha di più : riflettendo con
» attenzione sulla natura del *primo incontro*, sem-
» bra evidente che la stessa costruzione del triangolo
» PQR non possa aver luogo, dimodochè l'angolo RQP
» non esisterebbe affatto. Imperocchè se le due rette
» AB, HP debbono incontrarsi a distanza *infinita*, esse
» non ammettono prolungamento, essendo esaurita la
» loro estensione ; dunque non potendo prolungarsi la
» retta HP, non può eseguirsi la costruzione dello
» Scorza. Questa idea che pare a prima giunta un
» paradosso, è una conseguenza immediata e necessa-
» ria dell' idea dell' infinito, oltre il quale non si può
» andare con la mente, e molto meno con la riga.
» Una tale conchiusione è avvalorata ancora da conside-
» razioni nascenti dal fondo del soggetto. Primiera-
» mente, se la retta AB potesse prolungarsi al di là
» del primo incontro, questo non sarebbe più il pri-
» mo, contro l' ipotesi; e se non può prolungarsi la
» retta AB, non deve potersi prolungare neppure la
» HP, che trovasi nelle medesime circostanze. In se-
» condo luogo, immaginiamo che la retta HP giri in-
» torno al punto H finchè ritorni ad occupare la po-
» sizione primitiva HL : è certo che quando sarà giun-
» ta a coincidere con la parallela HK, avrà lasciato
» interamente la retta AB. Ora ciò non può acca-
» dere se non supponendo che, ad una distanza infi-
» nita dal punto G, le due rette AB, HP terminano
» in un punto comune per cui seguitando a girare la
» HP, le rette medesime si distaccano, e cessano d'in-
» contrarsi. Che se le due rette in quistione si voles-
» sero supporre capaci di prolungamento al di là di

» quell' ultimo termine comune, lasciando da parte
» che ciò ripugnerebbe all' idea dell' infinito, è evi-
» dente che esse non potrebbero mai distaccarsi, e la
» retta circolante non giungerebbe mai a prendere la
» posizione della parallela HK, il che è contrario al
» fatto. Come poi l' incontro delle due rette A B,
» PH, nel limitato giro di quest' ultima dentro l' an-
» golo finito PHK, possa percorrere uno spazio in-
» finito, non è facile spiegarlo; ma se la mente ri-
» mane sorpresa da questo misterioso procedere dell'in-
» finito, le conseguenze che ne emergono non sono
» per ciò meno certe ed evidenti. Il prof. Scorza aven-
» do trattato l' incontro delle due rette AB, HP come
» un incontro ordinario, mentre ci era di mezzo l'in-
» finito, ha applicato una costruzione ed una dimo-
» strazione geometrica dove non era permesso di farlo,
» siccome avevamo avvertito fin da principio, e cre-
» dendo di stringere il suo fuggevole soggetto (ci rin-
» cresce il dirlo) *nubes et inania cepit* (*).

» Termineremo con una osservazione che appoggia
» l' opinione di coloro i quali veggono nella imperfe-
» zione della definizione della linea retta un ostacolo
» insormontabile all' esatta dimostrazione del postula-
» to V. Il primo incontro della retta circolante H L
» con la AB si fa certamente a distanza infinita da un
» dato punto G, ed intanto (non essendo dimostrato
» il contrario) si potrebbe sostenere benissimo che quel
» primo incontro accada al di là della retta H D di
» data posizione. Immaginando la figura che prende-
» rebbe la linea retta di cui la direzione coincidesse da
» principio con una retta HN, e che dovesse poi congiun-
» gersi con la AB all' infinito, si vede che essa somiglie-
» rebbe ad una curva il cui assintoto sarebbe AB. Ora
» questa assurdità che colpisce i sensi non può esser
» posta in chiaro con un ragionamento geometrico per

(*) *Si vuole da alcuni che un illustre corpo scientifico abbia riconosciuta esatta la dimostrazione del prof. Scorza.*

Digitized by Google

» le imperfette nozioni che si hanno della linea retta.
» E chi per poco ha meditato su questo ingrato sog-
» getto delle parallele, ha vednto continuamente cam-
» biarsi la linea retta in mille forme le più strane,
» senza poterla aintare a rimettersi nel suo stato nor-
» male. Un dotto nostro amico tentando (come fin dai
» tempi di Nassiredin si era fatto) di dimostrare sen-
» za il soccorso delle parallele il teorema pitagorico
» sulla somma degli angoli del triangolo, dopo aver
» esclusa l'ipotesi, dimostrata impossibile da Legen-
» dre, che una tal somma possa superare due angoli
» retti, nel discutere l'ipotesi contraria, se potesse
» esser minore, fu da semplici e rigorosi ragionamen-
» ti condotto a questa consegnenza singolare, che *la*
» *somma degli angoli di un triangolo doveva esser mi-*
» *nore di qualunque angolo dato*; il che non può im-
» maginarsi senza dare ad ogni lato del triangolo la
» forma di una curva a rami infiniti che si congiun-
» gono nei vertici del triangolo medesimo. A che va-
» le dunque l'ingegnosissima definizione di Euclide se
» non può liberare la linea retta da queste metamor-
» fosi? Dire che la retta giace egualmente fra i suoi
» punti, e che occupa per consegnenza sempre lo stes-
» so sito girando intorno a'suoi estremi, è dare, sen-
» za dubbio, una chiara idea di un tal soggetto, ma
» una idea di cui non può valersi la geometria, una
» idea che non è bastata nel corso di duemila anni a
» togliere dagli elementi il preteso scandolo delle pa-
» rallele.

33. Passiamo al quinto libro di Euclide. Le defini-

Ci si permetta di non credere nemmeno alla probabilità di un tal fatto, e ciò sempre protestando pel chiarissimo professore la più alta stima ed il maggior rispetto: ma si tratta di parallele, che seducono, illudono, tradiscono, come hanno sedotto, illuso, tradito infiniti uomini grandi! Fortunatamente però per la scienza, gl'innumerabili sofismi che ci ha regalati questo soggetto sono stati e sono facilmente scoperti da uomini anche mediocri, quando non siano affascinati dall'amor proprio.

zioni di questo libro sono state il tormento di tutti i geometri. Che tenebre e densa caligine non hanno essi rinvenuto nelle definizioni della proporzione, delle proporzioni uguali, e della proporzione composta? Quante opinioni differenti, e spesso tra loro opposte non hanno i geometri riportate su di esse? Il solo Scorza trova luce, dove tutti gli altri non rinvennero che folte tenebre. Non pertanto dagli sforzi, dalle delicate riflessioni, dal grande sfoggio di erudizioni, con che egli si affatica a tutt' uomo per mostrare la precisione, chiarezza e facilità del greco geometra, n'è facile arguire il contrario, ossia la sua oscurità, e difficoltà.

Diciamo qualche cosa della terza definizione, la quale comunemente si traduce: *proportio est duarum magnitudinum ejusdem generis quoad quantitatem pertinet (sive secundum quantitatem) mutua quaedam habitudo*; e dallo Scorza così: *La proporzione ovvero la ragione è un certo scambievole rapporto di due grandezze omogenee secondo la quantità.*

L' acutissimo Borelli trovò questa definizione così cattiva, che non ebbe difficoltà ad asserire, che dessa non fosse dello Stichiota; ma piuttosto di qualche geometra imperito, che l' avesse intrusa ne' suoi Elementi. Il Borelli però ha fallito nella opinione del Sig. Scorza, che caratterizza questa definizione per molto precisa (1).

Il celebre Giovanni Wallis, sostenendo che non si possa affatto soffrire in un' accurata definizione, quello addiettivo *quidam*, il quale non determina qual sia il definito, cercò di dare un senso a questa definizione, traducendo il ποια σχέσις non già per *quaedam habitudo*, ma per *qualis habitudo* sive habitudo qualitativa. Con siffatta modificazione, osserva lo Scorza, il Wallis venne a spiegare solamente la parola σχέσις, e non già quel ποια, che resterebbe interamente inutile (2).

L' eruditissimo Barrovio ritenne quello addiettivo qui-

(1) Euclide Vendicato, pag. 231.
(2) Idem, 232.

dam dicendo che non vedeva, perchè si potessero riprovare le definizioni: *homo est quoddam animal ratione praeditum: triangulum est quaedam figura plana tribus rectis lineis comprehensa*. E quì riflette lo Scorza che il valent' uomo prese un grosso granchio; perchè da queste definizioni si verrebbe a dedurre che non ogni animale ragionevole sia uomo, che non ogni figura piana terminata da tre linee rette sia triangolo (1).

Tutti coloro poi, seguita lo Scorza, che trascurano nella definizione della ragione quello addiettivo *quidam*, restringono la definizione Euclidea alle sole grandezze commensurabili; laddove quella si estende ad ogni grandezza sia commensurabile, sia incommensurabile, e non ostante quel *quidam* adoperato dallo Stichiota, è dessa pienamente determinata (2).

Cristiano Volfio non bene intese la definizione Euclidea; altrimenti, dice lo Scorza, non l'avrebbe mutilata, definendola *per habitudinem ejusdem generis secundum quantitatem*, e poscia chiamata incompleta (3).

Il sommo Leibnitz, prosegue lo Scorza, definendo la ragione *ratio est ea homogeneorum relatio, quae quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumpto*, non fece distinzione, (è forte), tra le grandezze commensurabili ed incommensurabili; e perciò s'ingannò anche il Volfio, ripiglia lo Scorza, che chiamò completa la definizione Leibniziana (4).

Tornando di nuovo al Barrovio, osserva lo Scorza, che l'opinione, che porta questo geometra di potersi togliere questa definizione dal numero dei principi del quinto libro di Euclide per non esser una definizione matematica, ma metafisica e di semplice abbellimento, ripugna ai primi principi della filosofia (5).

Il Simson, che portò l'opinione del Barrovio intor-

---

(1) Euclide Vendicato, pag. 233.
(2) Idem, pag. 234.
(3) Idem, pag. 246.
(4) Idem, ib.
(5) Idem, pag. 250.

no alla nullità di questa definizione, e che credette al par del Borelli, che non fosse cosa del grande Stichiota, ma di qualche imperito editore, il Simson, afferma lo Scorza, s' ingannò con esso loro (1).

I moderni infine, in definendo la ragione di due grandezze omogenee per lo quoziente, che si ottiene dividendo l' una per l' altra, non definiscono che la sola ragione delle grandezze commensurabili, laddove, ripiglia lo Scorza, la definizione Euclidea abbraccia ogni grandezza (2). Ed a questo proposito passa egli a fare la distinzione tra la ragione delle grandezze commensurabili, e quella delle incommensurabili, ed una lunga e noiosa enumerazione delle specie della prima. La prima, dice egli, può essere o di *eguaglianza*, o d' *ineguaglianza*, e questa di *maggiore* o *minore ineguaglianza*. Quella di *maggiore ineguaglianza* può essere *multiplice*, *superparticolare*, *superparziente*, *multiplice-superparticolare*; e *multiplice-superparziente*. La prima ossia la *multiplice* si suddivide in *dupla*, *tripla*, ecc.; la *superparticolare* in *sesquialtera*, *sesquiterzia*, *sesquiquarta*, ecc. la *superparziente in superbiparziente*, *supertriparziente*, *superquatriparziente*, ecc. la *multiplice-superparticolare in doppia-sesquialtera*, *tripla-sesquialtera*, *quadrupla-sesquialtera*, *doppia-sesquiterzia*; *doppia-sesquiquarta* ecc.; la *multiplice-superparziente* in *doppia-superbiparziente*, *tripla-superbiparziente* ovvero *doppia-supertriparziente* ecc. La ragione poi di *minore eguaglianza* si suddivide in *submultiplice*, *subparticolare*, *subparziente*; *submultiplice-superparticolare*, *submultiplice-superparziente*, e così delle altre (3).

Quello addiettivo *quidam*, che ha tanto imbarazzato Borelli, Wallis, Barrovio, Volfio, Leibnitz, Simson, e tutti i moderni, forma a parere dello Scorza *il sommo della definizione Euclidea*. Infatti, ei dice, lo Stichiota à definita la ragione per un certo scambievole

---

(1) Euclide Vendicato, pag. 250.
(2) Idem, pag. 245.
(3) Idem, pag. 242.

Digitized by Google

rapporto di due grandezze omogenee secondo la quantità *per significare non solo che un tal rapporto sia determinato in se stesso*, *ma per indicare ancora che talvolta non si possa esattamente esprimere in numeri, quando cioè le grandezze sieno incommensurabili*; *poichè di quello addiettivo* un certo, *ch' egli premette alla voce* rapporto, *ci sogliamo servire, come osservano i grammatici, quando la cosa non possiamo adequatamente esprimere con parole* (1).

Quantunque la interpetrazione dello Scorza sia molto acuta e delicata, pure non è tale, che non vi si possa opporre nessuna difficoltà. E per verità se l'assenza di quel *certo* restringe, come sostiene il Sig. Scorza, la definizione Euclidea alle sole grandezze commensurabili, delle quali il rapporto è determinato, la sua presenza al contrario dee restringerla alle sole quantità incommensurabili, in cui il rapporto, non è determinato, e per esprimere tale indeterminazione si rende necessario. Ed oltre a ciò quel *certo* dee avere la stessa significazione comunque sieno le grandezze; ma nel caso delle grandezze commensurabili, potendosi esprimere il rapporto esattamente in numeri, esso o non dovrebbe esprimere nulla, ed allora sarebbe inutile, od esprimendo non potersi esprimere adequatamente la cosa, verrebbe a significare che anche nel caso delle quantità commensurabili non potrebbesi adequatamente esprimere il rapporto. Secondo lo Scorza adunque quel *quidam* dee esistere e non esistere nella definizione Euclidea, esistere quando le grandezze sono incommensurabili; non esistere quando sono commensurabili. Per la qual cosa pare che si potesse conchiudere che se i geometri col trascurare quello addiettivo *certo* abbiano ristretta la definizione Euclidea alle sole grandezze commensurabili, il signor Scorza con la introduzione del medesimo l'abbia ristretta alle sole incommensurabili; e però se con una mano ha afferrate le incommensurabili dall' altra gli so-

(1) Euclide Vendicato, pag. 239.

no scappate le commensurabili. Del resto comunque vada la cosa, sia che quel *quidam* debba interpetrarsi, come opina il sig. Scorza, sia che debba sopprimersi, come pare, è fuor di dubbio che questa definizione sia oscurissima e difficoltosissima, perchè tal è sembrata a tutti i geometri, ad eccezione dello Scorza, il quale credendola chiara e precisa, e non potendo persuadersi come essa avesse potuto sembrare tanto oscura e difficile ai geometri, si esclama: *Tanto ardua ed oscura era pei geometri l'idea della proporzione!*

Le difficoltà incontrate dai geometri nelle definizioni VI, VII, VIII dello Stichiota corrispondenti alle V, VI, VII del Commandini, non sono punto minori di quelle della III. Il solo Scorza dice: *sebbene non possono essere nè più semplici, nè più naturali, pure sono sembrate finora ai geometri un laberinto inestricabile* (1). Tanto può nel nostro Scorza l'amore dello Stichiota!

34. Da quel poco, che si è detto sulle definizioni Euclidee del quinto libro risulta che desse sieno effettivamente oscure e difficili. Tutti i geometri hanno vivamente sentito il bisogno di rendere il quinto libro dello Stichiota più facile, per renderlo più accessibile. Ciò ha indotto i moderni a dimostrare la teorica delle ragioni e proporzioni coll' aritmetica generale od algebra, colla quale nel tempo stesso ch'essi non hanno nulla tolto al rigore delle dimostrazioni, hanno reso un gran servigio alla Geometria, rendendo questa scienza di patrimonio comune, laddove prima non era che de' soli geometri. Non così però la pensano i nostri Sintetici, i quali non sanno darsi pace su tal proposito. Essi portano ferma opinione che definendo i moderni la ragione o rapporto di due grandezze omogenee per lo quoto che si ottiene dividendo l'una per l'altra, non definiscano che la sola ragione delle grandezze commensurabili, e che quindi la teorica delle ragioni e propor-

---

(1) Euclide Vendicato, pag. 255.

Digitized by Google

zioni trattata coll' aritmetica, non abbracciando che le sole grandezze commensurabili, non sia applicabile generalmente alla geometria. Questa loro credenza, se mal non ci apponiamo, è fondata sulla definizione del numero colla quale la maggior parte degli Aritmetici suole definirlo per la *collezione di più unità*. Una tale definizione è patentemente monca, perchè, a stretto rigore parlando, non abbraccia che il solo numero intero, che risulta dalla riunione di più unità, e perciò è misurato dalla unità: il numero fratto non è che una parte dell' unità, e perciò, dice l' incomparabile Newton, vièn esso misurato da una parte summultiplice dell' unità, ed il *sordo* od irrazionale non è esattamente misurato, perchè la unità sua è incommensurabile. Partendo da una definizione cotanto monca del numero, i signori Sintetici sostengono che nella ragione di due numeri *è manifesto quanto sia l' uno rispetto all' altro per esser tutti misurati dall' unità*; laddove nella ragione di due grandezze incommensurabili non si sa precisamente quanto sia l' una rispetto all' altra, per non esser queste misurate d' alcuna unità (1). Ora se nella ragione di due numeri detta *numerica*, è manifesto quanto sia l' uno rispetto all' altro, domandiamo di grazia, quanto sia 1 rispetto a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ecc.? Se tutti i numeri sono misurati dall' unità, domandiamo, qual' è quella unità che misura $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ecc. E quì i signori Sintetici o dovrebbero rispondere che $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ecc. non sono numeri, o che l' unità, che li misura è incommensurabile, il che equivale a dire che non hanno esatta misura, e perciò non possono essere misurati esattamente d' alcuna unità. Da ciò si raccoglie che la ragione, per la quale essi credono che la ragione numerica non contenga che le sole grandezze commensurabili, sia la monca definizione del numero; secondo la quale sarebbe pur troppo vero, che nella ragione di due numeri è manifesto quanto sia l' uno rispetto all' altro per essere tutti misurati dall' unità.

---

(1) Euclide Vendicato, pag. 234.

Spariscono le difficoltà adottando pel numero la definizione dell'incomparabile Newton, il quale così il diffinisce:

Per Numerum *non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus., Estque triplex ; integer, fractus, et surdus.* Integer *quem unitas metitur*, fractus *quem unitatis pars submultiplex metitur, et* surdus *cui unitas est incommensurabilis* (1).

Il numero così definito contiene e le grandezze razionali, e le irrazionali; anzi si vede chiaro che in esso è così incorporata, immedesimata l'idea della ragione, che non può concepirsi quello senza avere prima idea di questa. Se avessero posto mente i Sintetici a questa completa definizione del numero non andrebbero ripetendo che un Leibnitz non avesse fatto la debita distinzione tra le grandezze commensurabili ed incommensurabili, e che tutti i moderni seguendo Newton, Leibnitz, Volfio, ecc. hanno troncato, non isciolto il nodo gordiano.

35. Ammesso con gli esagerati ammiratori di Euclide che in ventuno secolo i geometri non avessero saputo punto nè migliorare, nè accrescere gli Elementi di Euclide, che tutti gli altri Elementi di Geometria non potessero reggere il confronto di questi, che infine fossero *un prodigio di perfezione dello spirito umano, l' opera più perfetta uscita dalla mano dell'uomo, l' opera che ha conseguita da Euclide tutta la perfezione*, se ne potrebbe inferire perciò che si hanno da preferire a quelli dei moderni, e massime a quelli del Legendre, che occupano tra i moderni il primo posto? Ci pare di no; perchè i requisiti più necessari, che dee avere un libro d'istituzione, sono senza dubbio la chiarezza e la facilità, requisiti che mancano interamente agli Elementi di Euclide, ne'quali l'oscurità e le difficoltà son tali, che sconcerterebbero geometri di prim'ordine non che teneri giovanetti. Interroghiamo un po'la storia su tale

---

(1) Newton, Arithmetica Universalis, pag. 4.

Digitized by Google

punto. Il Bossut, mentre ammira il metodo rigoroso costantemente serbato dal greco Geometra, ne fa marcare le gravi difficoltà nei seguenti termini:

« Euclide, dans ses élémens, s'est conformé à cette » méthode rigoureuse, consacrée par l'assentiment una» nime des anciens géomètres. Mais par là même, ses » démonstrations sont quelquefois longues, indirectes, » compliquées, et les commençants ont de la peine à » les suivre. C'est ce qui a déterminé plusieurs moder» nes dans les éditions, qu'ils ont données des élémens » d'Euclide, à employer des démonstrations plus sim» ples et plus faciles, que celles de l'auteur. Peut-être » faut-il attribuer à cet inconvénient, attaché aux an» ciennes méthodes, les difficultés que Ptolomée Phi» ladelphe, roi d'Égypte, d'ailleurs homme d'esprit, » éprouvait dans l'étude des mathématiques. Fatigué » par l'extrême attention ch'il fallait y donner, il de» manda un jour à Euclide s'il ne pouvait pas appla» nir la route en sa faveur; le géomètre philosophe ré» pondit ingénuement: *Non, prince, il n'y a point de* » *chemin particulier pour les rois* » (1).

Ora se un Tolomeo incontrava nello studio degli Elementi Euclidei tali difficoltà, quali non dovranno in essi incontrare i giovanetti inferiori forse a Tolomeo di età, ed al certo d'ingegno? Se Tolomeo era sconcertato dalle difficoltà degli Elementi di Euclide, mentre erano questi integri, e mentre viveva l'Autore stesso, che gliele spianava, quali difficoltà non dovranno incontrare negli Elementi adulterati senza dubbio i giovanetti, che non hanno, nè possono avere un Geometra come il grande Euclide, che loro le potesse spianare? Se Tolomeo infine domandò ad Euclide se gli potesse spianare la strada, i giovanetti non ne dovranno fare la stessa domanda? E potremo noi senza grave discapito delle scienze condurli per un sentiero erto, scabroso, e quasi inaccessibile, e celar loro l'altro comodo, piano e a tutti

(1) Essai sur l'Historie générale des Mathématiques, Tom. I. pag. 47.

accessibile aperto da'moderni e specialmente dal Legendre?

Lo storico Montucla, parlando del X libro di Euclide, dice:

« Le 10^e livre contient une théorie si profonde des » incommensurables, que je doute, qu'il y ait aujour-» d'hui un géomètre qui osât suivre *Euclide* dans cet » obscur dédale ».

Ed in altro luogo, facendo lo stesso storico un paralello tra gli Elementi di Euclide e le moderne istituzioni di geometria, si esprime così:

« Quelque supériorité que je donne aux Élémens » d'*Euclide* sur les ouvrages modernes de ce genre, » je ne disconviendrai cependant point de l'utilité de ces » derniers. On ne peut leur contester l'avantage d'avoir » rendu l'étude de la géométrie plus facile, d'en avoir » même répandu le goût. Tous ceux qui étudient la » géométrie, ne se proposent pas d'y pénétrer pro-» fondément. Les uns ne le font que pour connaître » une science qui a une grande réputation; les autres » parce que l'état qu'ils embrassent exige des connais-» sances mathématiques: j'en ai vu qui soucioient si » peu de la démonstration géométrique, qu'ils s'en » seraient volontiers tenus à la parole et à la bonne » foi de leur maître. Enfin, plusieurs ne sont pas ca-» pables du degré d'attention, ou doués du courage » d'esprit nécessaire pour surmonter les difficultés de » certains endroits du géomètre ancien. Il était donc » nécessaire de rendre la géométrie plus accessible, et » c'est ce que plusieurs des ouvrages dont nous parlons » ont fait fort heureusement. Si j'avais à enseigner la » géomètrie; je ne férais aucune difficulté de m'en ser-» vir; cependant si je rencontrais un esprit doué d'une » grande facilité, de ce génie enfin qui annonce le géo-« mètre avenir, je ne lui conseillerais point d'autre li-» vre qu'*Euclide*. Ma façon de penser m'a été confir-» mée par un habile géomètre, consommé dans l'art » d'instruire, que je nommerais si je croyais qu'il le » trouvât bon » (1).

(1) Histoire des Mathématiques, Part. 1. liv. IV. pag. 211.

Si raccoglie da questo tratto del Montucla che gli Elementi di geometria de' moderni debbonsi preferire per la istituzione della gioventù a quelli di Euclide, e ciò perchè ne' primi havvi un certo gusto, una certa facilità, che li rende a tutti accessibili; laddove i secondi non sono accessibili che a quelli esseri fortunati, che il cielo destina geometri (1).

Lasciamo gli autori d'Oltramonti, e vediamo se da ciò che dice lo stesso Scorza conviene insegnare gli Elementi di Euclide, o quelli de'moderni. Lo Scorza benchè cercasse in ogni incontro di palliare quanto può l'oscurità e le difficoltà dello Stichiota, pure parlando delle definizioni del quinto libro dello Stichiota suo malgrado è costretto a dire :

» Senonchè dispiace sommamente a' geometri che in

(1) Come appurare prima di mettere la geometria nelle mani di un giovinetto, ch'egli annuncia un futuro geometra? La storia non ci presenta che pochi di questi esempi, pei quali sarebbe stato indifferente qualunque istituzione di geometria. Un Pascal, per esempio, che all'età di soli dodici anni senza conoscere neppure le definizioni del punto, della linea, dell'angolo ecc. giunse a dimostrare la XXXII proposizione del I libro di Euclide, sarebbe certamente divenuto un gran geometra, come col fatto divenne, sia che avesse studiato gli Elementi di Euclide, sia quelli del Legendre o di qualunque altro moderno; posto che fossero allora esistiti ; e se non fosse affatto esistita la geometria, l'avrebbe creata, come parte ne creò nella tenera età di dodici anni. Ammesso ancora che al giovine di gran penetrazione si affacessero più gli Elementi di Euclide, che quelli di qualunque moderno , resterà sempre stabilito che i professori per la istituzione della gioventù non dovranno valersi degli Elementi di Euclide; ma di quelli del Legendre, se pur bramano il generale vantaggio. Cosa direbbe il dotto Montucla se vivesse in veder gli Elementi di Euclide in mano a giovanetti che il cielo destina artisti, in mano a giovani che non debbono oltrepassare lo studio degli elementi di Geometria?

» una teoria così importante non si osservi la con-
» sueta chiarezza di Euclide, specialmente nelle defi-
» nizioni, che ne sono i primi ed immediati princi-
» pii. Infatti quante difficoltà non si sono finora incon-
» trate nella definizione stessa della proposizione, ch'è
» il soggetto di tutto questo quinto libro? E quante
» altre nelle definizioni delle proporzioni uguali e disu-
» guali, senza dir nulla di quelle che si sono incon-
» trate nella definizione della proporzione composta?
» Certamente i criterii che in quelle definizioni asse-
» gnansi da Euclide per distinguere le ragioni uguali
» e disuguali, sono sembrati assai più oscuri delle pro-
» porzioni medesime, che dimostransi per mezzo di es-
» si; cosicchè non han dubitato di toglierli dal nu-
» mero de' primi ed immediati principii del quinto li-
» bro, e dimostrarli come tanti teoremi mediante al-
» cune di quelle proposizioni che han credute chiare
» per loro stesse: ed altri geometri disperando finan-
» che di poter altrimente sciogliere questo nodo gordiano
» l'hanno totalmente troncato dalla geometria, creden-
» do essere la proporzione un semplice affare da trat-
» tarsi nell' aritmetica, quasichè in natura più non esi-
» stessero le grandezze incommensurabili. Ma ciò è
» nato dal non aver essi compresa la terza definizio-
» ne ecc. » (1).

Ora se questo libro è sembrato oscuro ed intralciato a tutti i moderni geometri è forza conchiudere che lo sia effettivamente. Un libro, che o il valente Scorza, o il sommo Leibnitz non ha pienamente compreso, non si potrà certamente comprendere da' tironi in geometria; e però è una stranezza porlo nelle loro mani. Come potran essi comprendere le definizioni di questo libro, e specialmente la terza, quinta, sesta e settima, che si chiamano dallo stesso Scorza *tormento de' geometri*, *laberinto inestricabile?*

Infine se non vi fossero altre pruove delle difficoltà ed oscurità degli Elementi di Euclide, quelle, che ne

(1) Euclide Vendicato, pag. 226.

somministrano gl' infiniti *Euclidi comentati, annotati, illustrati, restaurati, ripristinati*, ecc., non sarebbero più che sufficienti? Evvi forse bisogno di comenti, annotazioni, illustrazioni ecc. a ciò ch' è di per sè chiaro, facile e naturale (1)?

Da tutto ciò che si è detto sulle difficoltà, ed oscurità, che presentano i famosi Elementi di Euclide, si può conchiudere che la geometria di Euclide non è libro d' istituzione, perchè non suscettibile ad esser compreso se non da tutti, almeno dalla generalità. I maestri dunque, che vorranno far profittare i loro discepoli, non dovranno insegnare che autori moderni accreditati, e niuno fra essi lo è più meritamente del Legendre. Euclide non può stare tra le mani degli scolari, ma tra quelle sole del profondo geometra. La clava d'Ercole non può stare che tra le mani degli Ercoli.

---

(1) Quei tali, che per comprovare la facilità degli elementi del greco Geometra adducono che al Newton sembrarono troppo chiari, e che il Pascal li comprese con una semplicissima lettura, si dimenticano che il primo all' età di 24 anni aveva gittate le fondamenta delle due celebri opere, i *Principi* e l'*Ottica*, e che l'altro all' età di sedici anni dava alla luce un Trattato di sezioni coniche, che annunziava il famoso autore de' problemi sulla cicloide.

C A P. VII.

Avversione del Flauti all' analisi moderna. Della sua Geometria di Sito. *Aspetto antico dato a questa novella Geometria. Sue lodi eccessive prodigalizzate agli antichi, ed ingiustizia usata a' moderni a proposito delle superficie storte. Quanto havvi nella Geometria di Sito e del Fergola e degli antichi è eterrogeneo alla Geometria Descrittiva. Dello scopo di questa scienza. Alla Geometria di Sito manca questo scopo.*

36. Tra tutti i discepoli del Fergola l'illustre Flauti si è mostrato più avverso all'analisi algebrica. In fatto quanti difetti, inconvenienti, e sconcezze non trovà il Flauti nell'analisi algebrica! L'analisi algebrica ci fa pervenire a risultamenti inconstruibili ed anche inconcepibili (1); l'analisi algebrica particolarizza i risultamenti della Geometria (2); l'analisi algebrica è un' *arte combinatoria*, la quale non somministra alcun mezzo sicuro, onde conoscere il grado, cui ascende un problema (3); l'analisi algebrica invano tenterebbe la soluzione di alcuni problemi di sito (4); i risultamenti somministrati dall'analisi algebrica non hanno con quelli a'quali perviene la Geometria alcun nesso (5), in somma non v'è difetto che non venga apposto dal Flauti all'analisi algebrica, la quale pe' suoi difetti ha portato la sognata decadenza delle matematiche presso di noi (6). Ora siccome l'opera, ove più spicca l'avversione del Flauti al-

---

(1) Geometria di Sito, introduzione, pag. 18.
(2) Idem, pag. 60.
(3) Programma destinato a promuovere e comparare i metodi ec.
(4) Geometria di sito, pag. 249.
(5) Idem, introduzione, pag. 19.
(6) Dopo aver apposti tutti questi difetti all'analisi algebrica il Flauti dice ch'egli non intende far torto a questa analisi. *Programma destinato a promuovere ecc. e di nuovo riprodotto ecc.*

la moderna analisi è la sua *Geometria di Sito*, così noi su questa c' interterremo.

37. La dedica e la introduzione di questo libro sono un panegirico degli antichi, una diatriba contro i moderni, i quali son causa di *far traviare dal retto sentiero d' inventare e di dimostrare in geometria la gioventù, alla quale non si fa altro che empir la testa di ampollosi nomi e di formole delle quali non sa usare nelle particolari applicazioni, e che poi dimentica un momento dopo d' averle imparate a memoria; giacchè essa nessun nesso di ragionamento geometrico si forma sopra di quelle nella mente come nessun nesso vi è tra astrattissimi simboli e construzioni di Geometria* (1).

Questa imputazione a' moderni non ha bisogno di giustificazione. Diremo solamente che il sostenere non esservi alcun nesso tra i risultamenti dati dall' Algebra in formole e quelli della Geometria dati in costruzione è porsi in contraddizione col Monge, il quale, parlando dello strettissimo nesso ch' esiste tra loro, così si esprime: *Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive, qui ne puisse être traduite en Analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie* (2).

38. Si sa da tutti che la Geometria Descrittiva sia dovuta interamente a' moderni e specialmente al Monge. Il sig. Flauti fa tutto il possibile, ond' essa apparisca antica; ma parlando ingenuamente con tutti i suoi sforzi ei non fa che vestire una madonna nostra in carne ed ossa alla foggia greca. Non volendo dunque far apparire niente di moderno in questa moderna geometria egli comincia dal rifiutarne pur anche il nome; e però alla denominazione di Geometria Descrittiva sostituisce quella di *Geometria di Sito* (3). Le

(1) Introduzione alla Geometria di Sito, pag. XIX.

(2) Géométrie Descriptive, n. 10.

(3) Anche il Lacroix sostituisce la denominazione di *Geo-*

superficie denominate *storte* dai moderni, vengono da lui appellate *plectoidi*, sulle quali ei crede che noi siamo zero a fronte degli antichi. Ecco sopra quali deboli fondamenta appoggia tutto l' edificio della sua asserzione.

39. Pappo nel libro quarto, Prop. XXIX. delle *Collezioni Matematiche* dice: *La retta* L K I *è dunque in una superficie* (plectoide). Il Commandini, comentando questo luogo, dice che Pappo fa menzione più appresso delle superficie *plectoidi*; ma che non ricorda di aver mai letto quali desse si fossero, e perchè così si chiamassero, ed opina che si dovesse leggere in *cilindroide*, anzi che in *plectoide*. Lo storico Montucla discorrendo di coteste superficie è d'avviso che non sia cosa facile l'indovinare quali desse si fossero. Il Sig. Scorza rinvenendo secondo il solito luce, ove il Commandini e il Montucla non rinvennero che tenebre, fece osservare al suo Collega Flauti che la superficie *plectoide*, in cui esiste la retta L K I di Pappo, è una di quelle superficie, che i moderni chiamano storte, perchè Pappo, dopo aver detto che la retta L K I è in una superficie *plectoide*, soggiunge immediatamente *fertur enim* (*recta* o sia L K I) *per rectum lineam* B L, *et per lineam speralem positione datam*, (ch' è una spirale cilindrica). Dippiù in quella specie di Scolio che fa Pappo alla prop. XXX, dopo aver diviso i problemi in tre generi, *piano*, *solido* e *lineare*, è parlato del primo e del secondo, soggiunge del terzo:

« Relinquitur tertium genus problematum, quod li-
» neare appellatur; lineae nam aliae praeter jam dictas
» in costructionem assumuntur, quae varium et diffi-
» cilem ortum habent, ex inordinatis superficiebus, et
» motibus implicatis factae. Eiusmodi vero sunt etiam
» lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniun-

---

metria su i piani e superficie a quella di Geometria Descrittiva; tutti i geometri però, che alle conoscenze geometriche hanno accoppiate quelle delle arti belle, come Hachette, Vallée, Leroy, hanno conservata la denominazione del primo Geometra Descrittivo.

» tur, et aliae quaedam magis variae et multae a De-
» metrio Alexandrino ἐν ταῖς γραμμικαῖς ἐπιστάσεσι, hoc
» est in linearibus aggressionibus, et a Philone Tyaneo
» ex implicatione πληκτοειδῶν, et aliarum varii generis
» superficierum inventae, quae multa et admirabilia
» symptomata continent; et nonnullae ipsarum a ju-
» nioribus dignae existimatae sunt, de quibus longus
» sermo haberetur. Una autem aliqua ex ipsis est,
» quae et admirabilis a Menelao appellatur (1) ».

Dal primo de'due luoghi citati o non può dedursi nulla, come nulla ne dedussero il Commandini e il Montucla, o tutto al più, che la retta L K I di Pappo sia in una superficie storta; ma non si può affatto arguire che gli antichi intendessero per superficie *plectoidi* quelle medesime, che i moderni chiamano *storte*, giacchè potrebbe benissimo avvenire che gli antichi denominassero *plectoidi* tutte le superficie di una genesi complicata, e che le nostre superficie storte non fossero che una famiglia particolare di coteste superficie; e dà forza alla nostra congettura il secondo luogo di Pappo da noi trascritto; da cui si deduce che gli antichi intendevano per *plectoidi* tutte le superficie di una genesi complicata, e che perciò fossero così appellate da Filone Tianeo. Si arguisce ancora da questo medesimo luogo di Pappo che queste superficie erano varie e molte, e che di esse si servivano gli antichi nella risoluzione del terzo genere di problemi, chiamato *lineare*. Le conseguenze, che da questi due luoghi di Pappo deduce il sig. Flauti, sono ben differenti: egli ne deduce prima che le superficie storte de'moderni sono quelle stesse, che gli antichi denominavano *plectoidi*; secondo che essi avevano una completa dottrina su queste superficie, laddove i moderni appena su di esse hanno stabilite *poche considerazioni generali di sito* con la moderna Geometria; ed

---

(1) Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Federico Comandino ecc.

un momento dopo, negando a' moderni anche queste poche considerazioni di sito, soggiugne: *Noi dunque dopo tanti e tanti secoli e dopo sì grandi progressi delle matematiche non siamo pervenuti dal canto nostro, che a restituire può dirsi appena la definizione* (perchè ciò si crede fatto da lui) *di tal genere di superficie, in considerar le quali gli antichi avevano tanto progredito.* Quindi egli conchiude che *a noi manca ancora molto* (dovea dire tutto, non avendo che la sola definizione) *perchè in questo ramo importante delle Matematiche valessimo gli antichi* (1).

Ora posto che gli antichi avessero conosciuto completamente le superficie storte, è forza conchiudere che per tanti secoli, per quanti ne sono scorsi dalla più remota antichità fino all' introduzione della Geometria Analitica, non hanno i geometri nulla rinvenuto intorno alle medesime superficie in onta della loro *arte d' inventare e di dimostrare in Geometria.* Perchè il signor Flauti accagiona a' moderni ed alla loro geometria, che appena può contare sessant' anni, le colpe di più di venti secoli? E qui egli ci fa ricordare quel lupo di Esopo, che attribuiva delitti della data di un anno ad un'agnellina nata appena da sei mesi. Se i geometri per tanti e tanti secoli procedendo per retta via (essendo al presente a parer dello stesso Flauti fuor del cammino geometrico) non pervennero nulla a scoprire intorno alle superficie storte, che mal v' è, se i moderni impiegando le risorse della moderna analisi, tentano se potessero essere più fortunati di quelli, che gli avevano preceduti? Perchè con tanto calore si oppone il Discepolo del Fergola a questi tentativi?

40. Con tutte però le lodi esagerate, ch'egli prodigalizza agli antichi, e con tutta la ingiustizia che usa verso i moderni, non si può affatto sconvenire che quanto di Geometria Descrittiva havvi nella

(1) Introduzione alla Geometria di Sito, pag. XXVII.

Digitized by Google

sua Geometria di Sito, tanto si appartiene a' moderni, almeno rispetto allo scopo, e quanto havvi o del Fergola o degli antichi tanto non ha che fare con la Geometria Descrittiva propriamente detta, perchè non ha affatto che fare colle sue applicazioni. Che nesso possono avere con la Geometria Descrittiva i problemi sciolti dal Fergola col nuovo metodo detto di *conversione*? Non sono forse eterogenei a questa scienza tutti *que' problemi di sito che risolvonsi per mezzo di lemmi*? Non appartengono forse alla pura geometria que' tanti altri *problemi diversi delle applicazioni, ed elegantemente risoluti dal Fergola*, anzi che alla Geometria Descrittiva? Tutti questi problemi mostrano senza dubbio il genio del nostro Fergola, e la sua profondità nella geometria degli antichi; di maniera che essi farebbero la più bella comparsa in una raccolta di proposizioni di geometria pura; ma nel luogo ove sono incastonati, mostrano che l'Autore della Geometria di Sito non abbia penetrato profondamente lo scopo principale di questa novella Geometria, come passeremo a meglio dimostrare.

41. La Geometria Descrittiva si propone due oggetti: il primo è la esposizione de' mezzi, onde rappresentare su di una superficie tutti i corpi definibili, il secondo è di dare il modo, onde riconoscere dietro una descrizione esatta le forme de' corpi, e dedurne tutte le verità risultanti e dalla loro forma e dalle loro rispettive posizioni (1). Con questo doppio oggetto questa scienza s'introduce allo studio della determinazione delle Ombre, alla Prospettiva, alla Stereotomia, alla Gnomonica, in somma a tutte le belle arti, che ne formano lo scopo ed il fine principale. Da ciò naturalmente emerge che non si può essere geometra descrittivo senza essere disegnatore ed artista, perchè non si possono ben somministrare i mezzi da chi non conosce il fine, cui essi tendono. Il celebre Monge, che può con tutta ragione chiamarsi pa-

---

(1) Monge, Géométrie Descriptive, n. 1.

Google

dre di questa scienza, oltre ad essere gran geometra, era eziandio perfetto disegnatore, come l'assicura il suo valente allievo Dupin, che parlando del Monge dice: *Comme il dessinait avec une rare perfection*, e grande artista, come il dà chiaramente a divedere il suo *Traité de l'art de fabriquer les canons* (1). La conoscenza adunque, che aveva il Monge delle arti belle unita al suo genio matematico, gli fecero ideare la sua aurea Geometria Descrittiva, con la quale potè gittare le fondamenta di tutte le belle arti. Nè i signori Hachette, Vallée, Leroy avrebbero potuto estendere i confini di questa scienza segnati dal Monge, se ancor essi non fossero stati valenti disegnatori ed artisti.

42. Se dunque le belle arti sono lo scopo del geometra descrittivo, ne risulta che l'Autore della Geometria di Sito, mancando (come egli stesso ingenuamente afferma) *di quelle nozioni di mestiere che debbono formare la base delle sue applicazioni* (2), non poteva conoscere lo scopo di questo importante ramo delle matematiche. Da ciò certamente deriva ch'ei trascura le cose più importanti, come sono le costruzioni effettive, che si contenta di accennare sempre astrattamente senza venir mai alla esecuzione, le distinzioni delle parti visibili ed invisibili delle curve, i punti singolari, in una parola tutto ciò ch'è relativo alla parte grafica, la quale è tanto necessaria al geometra descrittivo, quanto sono le parole per esprimere i nostri pensieri. Ed in vero se la ispezione oculare delle proiezioni di un oggetto dee svegliare nella mente dello spettatore la forma dell'oggetto stesso e tutte le circostanze, che lo accompagnano, è chiaro che queste debbonsi effettivamente costruire, e segnare su di esse tutte quelle particolarità, le quali servono a far meglio comprendere e l'oggetto e la sua forma: e però è grave errore non segnare sulle proie-

---

(1) Monge, Géométrie Descriptive, Avertissement.
(2) Introduzione alla Geometria di Sito, pag. XXXI.

zioni e le parti visibili ed invisibili, i punti singolari, i piani tangenti limiti, gli assintoti, se n'esistono, ecc. perchè siffatte cose somministrano i mezzi, onde realizzare un disegno.

Seguendo passo passo l'Autore della Geometria di Sito ci convinceremo sempre più di questa verità.

Digitized by Google

C A P. VIII.

Nella Geometria di Sito si moltiplica senza alcuna necessità il numero delle proposizioni. Si criticano ingiustamente i geometri descrittivi sul criterio da essi assegnato per riconoscere se due rette s'incontrano nello spazio. Del criterio assegnato dall'Autore. L'analisi algebrica non restringe i risultamenti della Geometria Descrittiva. I risultamenti, a cui perviene l'Algebra, si possono sempre costruire. Si scorgono difetti nelle cose più semplici del Lacroix. Si dà un gran tuono ad un teorema elementarissimo. Si osservano de' difetti nella scoperta di questo teorema del sig. Monge. Avvertimento.

43. Chiunque ha studiato la Geometria Solida conosce che un piano è dato di sito, qualora sono dati tre dei suoi punti, od una retta ed un punto fuori di essa, o due rette, che s' incontrano. Laonde spendere tre proposizioni per mostrare che un piano è dato di sito 1.° *se son date le sue tracce su due piani di sito posti ad angolo.* 2.° *s' è data una delle sue tracce ed un punto in esso.* 3.° *se son dati tre de' suoi punti* (1), è moltiplicare senza necessità alcuna il numero delle proposizioni. Dippiù l'oggetto della Geometria Descrittiva non è quello di far vedere che ne' tre casi enunciati il piano sia dato di sito; ma di determinarlo, poichè è dato di sito; e siccome esso si determina trovandone le tracce, così la Geometria Descrittiva si propone di descrivere graficamente siffatte tracce.

44. Per riconoscere se due rette s' incontrano o no nello spazio il Lacroix ragiona così:

Pour déterminer s'il y a intersection ou non, il faut voir, si le point de rencontre des projections horizontales, et celui des projections verticales de chacune des droites, peuvent appartenir à un même point de l'espa-

---

(1) Geometria di sito, n. 61. 63. 64.

ce , c'est-à-dire , si ces deux points sont dans une même ligne perpendiculaire à **AB**, (essendo **AB** la linea di terra) (1).

Questo raziocinio non persuade al sig. Flauti , il quale perciò critica i geometri descrittivi francesi , e particolarmente il Lacroix nel modo seguente :

Che se tal congiungente risulti perpendicolare alla comune sezione de' piani di proiezione non sarà questo un criterio generale da arguire che le linee rette proposte nello spazio s' interseghino , come alcuni Geometri descrittivi , tra i quali il Lacroix, han detto; poichè ciò può avvenire senza che queste linee rette s'interseghino nello spazio, ogni qual volta una di tali rette esistesse in un piano perpendicolare ai due piani di projezione , nel qual caso la congiungente si confonde colle projezioni di questa linea retta. Noi daremo nel Cap. IV. un principio generale per conoscere quando , intersegandosi le proiezioni di due linee rette su i due piani di projezione, s'interseghino anche le linee rette nello spazio (2).

Il criterio assegnato dal sig. Flauti nel Cap. IV. consiste nel menare per una delle rette date di sito un piano parallelo all' altra, e vedere se questa ultima incontra uno dei piani di proiezione nella traccia di tal piano : se l' incontro ha luogo è chiaro che le rette debbono esistere in un medesimo piano , e perciò incontrarsi ; nel caso contrario non potranno incontrarsi.

Lasciamo le astrazioni e venghiamo a' fatti. Secondo questo criterio , allorchè son date di sito le due rette (*fig. 12*) (*AB* , *ab*), (*CD*, *cd*), e si vuole conoscere se s' incontrano o no nello spazio , è necessario

1.° prendere un punto qualunque (*E* , *e*) sulla retta (*DC* , *cd*), e ciò non si fa senza menare la perpendicolare *Ee* alla linea di terra.

---

(1) Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes , n. 19.

(2) Geometria di Sito , n. 57.

2.° Dal punto (*E*, *e*) bisogna menare la parallela a (*BA*, *ba*), e ciò non si fa senza menare rispettivamente le parallele *A'B'* , *a'b'* alle rette *AB*, *ab*.

3.° Trovare i punti *C*, *A'* ove le rette (*CD* , *cd*), (*B'A'* , *b'a'*) incontrano il piano orizzontale di proiezione , e ciò non si fa senza menare le rette *A'a'* , *Cc* perpendicolari alla linea di terra, o parallele alla *Ee*.

4.° Descrivere la traccia del piano *A' C*.

5.° Vedere se l'incontro di (*AB*, *ab*) col piano orizzontale cade sulla traccia *A' C*, e ciò non si fa senza menare la retta *a A* perpendicolare alla linea di terra.

Tutte queste cose è necessario praticare volendo servirsi del criterio assegnato dal sig. Flauti , laddove valendosi del criterio del Lacroix e degli altri geometri descrittivi non è necessario che di abbassare dal punto *I* la sola perpendicolare *I i* alla linea di terra , e vedere se passa per *i*.

Come poi il criterio assegnato dal sig. Flauti è più sicuro di quello del Lacroix , non cadendo in difetto nel caso , in cui una delle rette è perpendicolare alla linea di terra , non sappiamo persuadercene , perchè in questo caso la retta esistente nel piano normale alla linea di terra non è data di sito , non essendone data che una sola delle proiezioni. Il sig. Flauti allora poteva dire che il suo criterio era più sicuro di quello degli altri geometri descrittivi , quando avesse applicato il suo al caso, che sfuggiva all'altro. In che modo si può assegnare la traccia *CA* del piano se una delle rette (*AB* , *ab*), (*CD* , *cd*) non è interamente data di sito ?

45. Parè che l'Autore della Geometria di Sito voglia contraddire tutto ciò che va dicendo il Monge sullo stretto nesso che l'Algebra ha colla Geometria. In fatto nel n.° 37. si è veduto ch'ei asserisce che non esiste alcun nesso tra' risultamenti algebrici , e la loro costruzione geometrica , perchè il Monge asserisce il contrario, allorchè dice non esservi construzione di Geometria Descrittiva , che non possa esser tradotta in analisi ; e che quando le quistioni non comportano che

Digitized by Google

tre incognite, ciascuna operazione analitica può essere riguardata, come la scrittura d'uno spettacolo in Geometria. Nella genesi delle superficie curve il Flauti opina che l'Analisi Algebrica non possa avere una completa applicazione alla teorica delle superficie curve, e ch'essa invece di generalizzare i risultamenti, non fa che restringerli, e quindi limitarne l'applicazione alle Arti, perchè il Monge dice:

Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble: la Géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence, qui est son caractère; et, à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre (1).

La ragione per la quale il Flauti incolpa di sterilità l'analisi algebrica, si è che la Geometria Descrittiva può trattare anche di quelle superficie curve, la cui genesi non può geometricamente assegnarsi. Questa accusa all'analisi algebrica è solo apparente, e non potrebbe illudere che coloro che sono in essa poco versati. Ed in vero se la Geometria Descrittiva perviene a risolvere de' problemi sulle superficie curve non suscettibili di esser espresse da equazioni, egli è perchè in essa si suppone sapersi menare la tangente ad un dato punto di una curva, la normale, la tangente comune a due curve ec., allorchè queste sono designate; di maniera che allorquando un punto è dato su di una curva designata la tangente in questo punto dee considerarsi come data di sito. Ora se traduciamo in analisi queste supposizioni, l'analisi algebrica procede nella soluzione de' problemi di Geometria Descrittiva sulle superficie curve di qualunque natura essi si sieno, come la stessa Geometria Descrittiva. Se, per esempio, questa Geometria sa menare un piano tangente ad una superficie in un dato punto, egli è perchè si suppone che si sappia menare le tangenti a due curve qualunque tracciate sulla stessa superficie, che intersegansi nel punto dato. Ora se si riflette che nel-

(1) Géométrie Descriptive, n. 10.

Digitized by Google

l' equazione

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'} (x - x') + \frac{dz'}{dy'} (y - y')$$

del piano tangente nel punto x', y', z' di una superficie, $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ rappresentano le tangenti trigonometriche che le tangenti alle curve prodotte nella superficie da' piani $y = y'$, $x = x'$ fanno rispettivamente coll' asse delle x, y, e che esse debbonsi risguardare, come cognite, allorquando le curve sono designate, si scorge chiaro che il piano tangente rappresentato dall' equazione

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'} (x - x') + \frac{dz'}{dy'} (y - y')$$

resta determinato, e che se ne possono in conseguenza assegnare le tracce.

Veniamo ad un esempio. La Geometria Descrittiva sa menare un piano tangente ad una superficie di rotazione per un punto dato in essa anche quando la curva generatrice non è geometricamente definita, perchè si suppone nota la posizione della tangente alla generatrice nel dato punto, allorchè questa è semplicemente designata. Se si prenda per asse delle z l' asse di rotazione, e per piano delle xz il piano meridiano che passa pel punto dato x', y', z', sarà $y' = o$, $\frac{dz'}{dy'} = o$, e l' equazione del piano tangente si ridurrà, fatte queste sostituzioni, a

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'} (x - x'),$$

ch'è quella del piano perpendicolare al piano delle $x\,z$, la cui traccia verticale è la stessa tangente alla generatrice menata pel punto dato (1).

(1) Il valente Geometra D. Fortunato Padula nella sua bella *Raccolta di Problemi* mostra quanto sarebbe utile l'ap-

Digitized by Google

Dopo aver accusato l' Autor della Geometria di Sito di sterilità l'analisi algebrica nell' applicazione de' problemi di Geometria Descrttiva, dice:

Che perciò mal si avvisano coloro che imprendono a trattar le presenti quistioni con questo metodo (ossia con l' algebra), *quasi recandosi a scorno di far servire la Geometria a se stessa. Essi non solamente pervengono così a risultati incostruibili ; ma particolarizzano inoltre le teorie generali che sulla genesi delle superficie curve la sola Geometria può comodamente stabilire* (1).

E quì il Flauti poteva contentarsi di dire che qualche volta l'Algebra ci fa pervenire a risultamenti un po' complicati senza dire *inconstruibili* assolutamente ; perchè si sa che non havvi risultamento algebrico complicato che sia, che non si possa o elegantemente o non elegantemente costruire, allorchè corrisponde ad un fatto geometrico.

46. Il Lacroix, dopo aver fatto vedere che il problema, col quale si mena per un punto dato un piano tangente a due sfere date, si riduce a trovare i punti di concorso delle tangenti comuni a due cerchi colla linea, che ne unisce i centri, soggiunge:

Ce problème qui est du ressort de la Géométrie ordinaire n'entre pas dans notre sujet; cependant comme il ne se trouve pas dans tous les livres élémentaires, nous ne donnerons une solution, dont l'auteur nous est inconnu, mais qui est remarquable par sa simplicité.

Sur la distance (fig. 13.) CF *de deux centres, comme diamètre, on décrit la demi-circonférence* FOC ; *on décrit aussi du point* F *comme centre un arc de cercle*

---

plicazione del calcolo alla Geometria Descrittiva. Egli trova su di una superficie di rotazione senza tener conto della natura della generatrice *la locale de' punti pei quali condotta la normale alla superficie, questa faccia un angolo dato con una retta data di posizione.* Da questa proposizione deduce il metodo, onde acquerellare con tutto rigore geometrico la parte in chiaro delle superficie di rivoluzione. Leggasi la prefazione ed il Prob. XXVII. della citata Raccolta.

(1) Geometria di Sito, n. 111.

Digitized by Google

d' un rayon FQ *égal à la différence des rayons des cercles donnés et par le point* O, *où cet arc rencontre le premier, on mène le rayon* OF *qui détermine sur la circonférence du plus grand des deux cercles donnés, le point* P *par lequel doit être menée leur tangente commune.*

La démonstration de cette construction est tres simple. Il est aisè de voir que l'angle COF *est droit, d'où il suit que* OC *est parallèle à* PK *et s'en trouve éloignée d'une quantité* OP *qui par construction est égale au rayon* CR *du petit cercle* (1).

Or chi potrebbe mai credere che su questo squarcio sì semplice del Lacroix si potessero fare delle critiche osservazioni? Eppure il Sig. Flauti ne fa due: la prima è che il Lacroix dà la soluzione, come di autore incognito, mentre trovasi esposta dal Clavio nello Scolio alla proposizione 17 del suo Euclide, la seconda, perchè la riporta come rimarcabile per la sua semplicità (2).

Rispondendo alla prima osservazione, diremo che sebbene la detta soluzione si trovasse riportata dal Clavio nel suo Euclide, pure non ne segue che il Clavio ne fosse l'autore. Ammesso ancora che dessa fosse del Clavio, dal perchè il Sig. Flauti l'aveva letta nel Clavio, e se la ricordava, doveva averla letta in questo stesso autore anche il Lacroix, e parimenti ricordarsela?

Rispondendo alla seconda, diremo che la soluzione riportata dal Lacroix è veramente semplice; giacchè si trova con essa il punto di contatto P, e perciò PK colla semplice descrizione de' due circoli OQ, FOC e del raggio FP.

Il Sig. Flauti in vece di prendere per incognita il lato FP del triangolo FPK, prende il lato FK, che non determina effettivamente; ma indica il modo, onde si possa determinare, dicendo solamente si prenda

(1) Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes, n. 73.

(2) Geometria di Sito, n, 143.

nella FK il punto K; in modo che stia $FK : CK : : FP : CR$, e per K si tiri la tangente ad uno de' due cerchi, la quale riuscirà tangente anche all' altro (1). Ora volendo trovare effettivamente K fa d' uopo menare pe' centri F, C i raggi Fd, Cq paralleli tra loro e pe' punti d, q menare dq, la quale prolungata andrà ad incontrare la FC prolungata in K.

47. Voltando una carta della Geometria di Sito troviamo altra ingiusta critica fatta al Monge e al Lacroix a proposito del seguente teorema:

Se si tirino a tre cerchi dati di grandezza e di posizione, considerandoli a due a due, le tangenti esteriori comuni, i tre punti, ove queste concorrono, saranno in linea retta.

Quando noi presso due distinti professori dimostrammo l'enunciato teorema, non avevamo studiato dell' Applicazione dell' Algebra alla Geometria del Lacroix che le sole equazioni della retta e del cerchio. L'Applicazione dell' Algebra alla Geometria, o sia la Geometria a due e tre coordinate riduce la maggior parte delle proposizioni di Geometria a metodi generali. Nel caso, di cui è parola, la dimostrazione si presenta da sè, trovando l' equazione della retta, che passa per due punti di concorso delle tangenti, e vedendo se essa colla sostituzione delle coordinate del terzo punto di concorso delle tangenti resti soddisfatta.

Siano (fig. 14.) A, B, C i tre cerchi R, r, ρ i loro rispettivi raggi, D, d, δ le distanze AB, AC, BC dei loro centri. Prendasi OA per asse delle ascisse, ed OY parallela ad NB per asse delle ordinate.

L' equazione della retta ON, che passa pe' punti O, N, sarà $y = \frac{BN}{OB} x$, ovvero $\frac{y}{x} = \frac{BN}{ON}$, ed affinchè essa passi ancora per M, siffatta equazione dovrà essere soddisfatta sostituendo ad x, y le coordinate OP,

(1) Geometria di Sito, n. 141.

PM del punto M, e quindi avverarsi l'equazione $\frac{PM}{OP}=\frac{BN}{OB}$. La quistione si è dunque ridotta ad esprimere in funzione di R, r, ρ, D, d, δ, le rette PM, OP, BN, OB. Ora dalla simiglianza dei triangoli OAD, OBE si deduce $OB=\frac{rD}{R-r}$, e da quella di NCF, NBI, $BN=\frac{r\delta}{r-\rho}$. Similmente dai triangoli simili APM, ABC si ricava $BP=\frac{D\delta}{R-\rho}$, e perciò $OP=OB-BP=\frac{DR\,(r-\rho)}{(R-r)(R-\rho)}$, e $PM=\frac{R\delta}{R-\rho}$.

Sostituendo questi valori nell'equazione $\frac{PM}{OP}=\frac{BN}{OB}$, si avrà l'equazione identica

$$\frac{\frac{r\delta}{r-\rho}}{\frac{rD}{R-r}}=\frac{\frac{R\delta}{R-\rho}}{\frac{DR\,(r-\rho)}{(R-r)\,(R-\rho)}},$$

ch'è ciò che bisognava dimostrare.

Il Sig. Flauti dà un gran tuono a questo teorema. Egli dopo averne recata, a dire il vero, una elegante e breve dimostrazione, frizza i sommi analisti Monge, e Lacroix in questi termini:

La dimostrazione di questa verità elementare, ch'è come si vede, una conseguenza immediata dell'analisi geometrica del lemma problematico esposta al num. 141. è stata da' sommi Analisti Francesi Monge e Lacroix dedotta da

considerazioni fondate su i piani tangenti che possono condursi a tre sfere date ; ed il secondo di essi nella prima edizione della sua Geometria Descrittiva la credè inoltre non facile a dimostrarsi a priori. *Veggasi la Geometria Descrittiva del Monge , e la citata edizione di quella del Lacroix* (1).

Il Monge , menando nella sua Geometria Descrittiva un piano tangente a tre sfere, scoprì ed in un dimostrò il teorema in quistione. In fatto il piano tangente esteriormente a tre sfere date debb' essere ancora tangente ai tre coni circoscritti alle sfere considerate a due a due, e passare per conseguenza per li loro vertici. Ora questi vertici esistendo e sul piano, che passa per li centri delle tre sfere e sul piano ad esse tangente , dovranno essere allogati sulla loro comune intersezione. Considerando solamente ciò che avviene sul piano menato per li centri delle tre sfere, si vede ch' esso le intersega in tre cerchi massimi, che possonsi considerare come i tre cerchi dati , ed i coni in rette tangenti esteriormente a questi cerchi, che possonsi considerare, come le tangenti menate esteriormente ad essi , di cui i punti di concorso saranno allogati nella retta ch' è l' intersezione del piano tangente alle tre sfere col piano, che passa per li loro centri (2). Ecco come la ricerca del piano tangente a tre sfere fece conoscere al Monge la esistenza del teorema in questione. Il signor Flauti per criticare il Monge e il Lacroix per aver dedotta la dimostrazione di tal teorema dalla considerazione dei piani tangenti a tre sfere doveva trovar siffatta dimostrazione in una collezione di proposizioni di Geometria pura , e non già dietro una ricerca , la quale fa conoscere *a priori* la esistenza di questo bel teorema.

Il Lacroix più fedele interpetre del Monge , dopo

---

(1) Geometria di Sito , n. 147.
(2) Monge , Géométrie Descriptive , n. 44.

aver menato un piano tangente a tre sfere date di sito, soggiunge:

De là découle naturellement cette conséquence, que les points de concours des tangents comunes à tres cercles combinés deux à deux, sont placés sur une même ligne droite; proposition dont je dois la connaissance à M. Monge (1).

Ecco come un sommo Analista rende giustizia ad un altro sommo Analista. Il Discepolo del Fergola non solo trascura di dire che il detto teorema sia dovuto al sig. Monge; ma ancora lo critica non ponendo mente che lo scopo di questo è quello di menare un piano tangente a tre sfere; e siccome da questo problema scaturisce siffatto teorema, così ei non fa che avvertirlo.

Il divino Archimede, dietro la ricerca del centro di gravità del triangolo, trova che le tre linee, che uniscono i vertici di un triangolo co' punti medî de' rispettivi lati opposti vanno tutte e tre ad intersegarsi nello stesso punto del triangolo, ch'è il suo centro di gravità (2). Ora se potesse aver luogo la critica del Flauti, e quella del Fergola, di cui facemmo menzione nel n. 15, lo stesso Archimede non ne andrebbe esente, perchè l'anzidetta proprietà del triangolo potrebbe dedursi colla sola Geometria elementare senza l'impiego di considerazioni meccaniche.

48. Non vorremmo però che il lettore confrontasse la nostra dimostrazione analitica del teorema, di cui è parola, con quella del Sig. Flauti; avvegnachè questa ultima è più breve ed altresì più elegante. Lo scopo, per cui si è recata, non è affatto questo confronto; ma è di fare osservare che un teorema, che da sè

---

(1) Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes. n. 74.

(2) Archimedes ex Maurolico de Momentis Æquiponderantibus, Prop. XXVI.

stesso si presenta a qualunque giovanetto fornito delle sole cognizioni dell'equazioni della retta o del cerchio, un teorema, proposto come esercizio di scuola, non poteva sembrare difficile al Lacroix sommo Analista e ad altri Geometri Descrittivi, e se il Lacroix disse che un tal teorema era difficile a dimostrarsi *a priori*, intendeva parlare di una dimostrazione come quella del sig. Monge, nella quale si dimostra piuttosto l'esistenza di tal teorema, che il teorema medesimo.

CAP. IX.

La teorica delle intersezioni delle superficie è una delle più interessanti per le sue applicazioni. Della difficoltà, che s'incontra nel realizzare le intersezioni delle superficie. Della cura, che dee porsi nella scelta del sistema di superficie seganti per ottenere brevemente e con eleganza una intersezione. Esistono tre problemi su le intersezioni delle superficie nella Geometria di Sito, in cui l'Autore per una cattiva scelta di un sistema di superficie seganti rende le intersezioni lunghe e penose in pratica, difettose in teoria.

49. Una delle teoriche più interessanti della Geometria Descrittiva per le sue applicazioni alle belle arti è certamente quella delle intersezioni delle superficie. Ella è questa la ragione, per la quale i moderni Geometri Descrittivi hanno posta tutta la cura e precisione tanto nella scelta delle superficie seganti, quanto nella determinazione precisa delle curve d'intersezione, determinando colla massima precisione e nettezza le parti visibili ed invisibili di esse, i punti singolari, gli assintoti, se ne ammettono, e tutte in somma quelle circostanze, che servono a precisare ciò che passa nello spazio.

50. Il sig. Flauti al contrario tratta la teorica delle intersezioni delle superficie come puramente matematica ed astratta. Egli quindi si contenta di accennare soltanto i metodi generali da praticarsi per le intersezioni delle diverse superficie senza trovare graficamente queste intersezioni, e senza punto curarsi della loro parte grafica. E qui cade in acconcio il riflettere, che havvi tanta difficoltà dal passar dalla soluzione astratta di un problema di Geometria Descrittiva alla esatta esecuzione grafica del medesimo, quanto ve ne ha

dal passare dall' ideale al reale, e noi siamo sicuri, che se si ponessero innanzi a tutt' i Sintetici, carta, righe, squadre, compassi e matita, essi si troverebbero molto imbarazzati nello eseguire la più facile di tutte le intersezioni. Tutti ben comprendono, per esempio, che un punto è dato, qualora se ne conoscono le distanze da tre rette date di sito, perchè tutti ben comprendono ch' esso, dovendosi trovare su di tre superficie cilindriche aventi per assi le rette date e per raggi rispettivi le tre distanze date, dee essere uno dei punti, che ànno di comune; ma non tutti sono nello stato di eseguire graficamente le intersezioni delle anzidette superficie cilindriche, e di trovare i punti di comune fra loro, ch' è lo scopo principale della Geometria Descrittiva. Se il sig. Flauti fosse di ciò persuaso, non citerebbe il Supplemento del sig. Hachette alla Geometria Descrittiva del Monge a solo oggetto di far osservare la construzione grafica dell' intersezione di tre cilindri (1), ma costruirebbe egli tal intersezione; perchè il Geometra Descrittivo non si forma affatto osservando; ma descrivendo. E quì non possiamo astenerci dal riflettere che il Discepolo del Fergola mentre cita finanche le minuzie degli antichi, e dei loro seguaci, non cita poi mai il sig. Hachette, e gli altri moderni Geometri nelle cose veramente d' importanza; ma solo in quelle da lui credute o di niun conto, o poco esatte. Così egli cita ne' n.i 57. 143. 147. 167. 270. 273. 359. Lacroix, Carnot, Hachette, Monge, e Lagrange, a ciascuno de' quali non dà il titolo di sommo Analista, se non quando egli crede di correggerlo. Niuno vieta al sig. Flauti di portare al cielo gli antichi, ed i loro seguaci; ma questi non s' inalzano abbassando i moderni. Ci perdona il lettore questa digressione. Torniamo subito all' intersezione delle superficie.

51. Il Geometra Descrittivo dee adoperare tutta la

---

(1) Geometria di Sito, n. 263.

sagacità nella scelta del sistema delle superficie seganti mediante le quali si ottiene la intersezione di due superficie, avvegnachè spesso avviene che per mezzo di una scelta a proposito di superficie seganti si ottiene elegantemente, e con poca fatica e gran precisione quella intersezione, che si otterrebbe con grande stento e gran fatica con altre superficie. Tre esempi di tal natura ne offre la Geometria di Sito, ed il primo di essi nella soluzione del problema :

Construire l'intersezione di una superficie cilindrica data di sito con un' altra di rivoluzione intorno ad un asse verticale data di forma e di sito (1).

Il sistema di superficie da adoperasi per ottener questa intersezione è quello delle superficie cilindriche aventi per generatrici delle rette parallele alla generatrice della superficie cilindrica data di sito, e per direttrici i diversi paralleli della superficie di rotazione. Ciascuna di queste superficie, intersegando la superficie cilindrica data secondo linee rette, è chiaro che i punti, in cui queste intersegheranno i paralleli presi per direttrici, apparterranno alla comune intersezione.

Il Flauti, mentre dice che per ottener eleganti soluzioni bisogna talvolta rinunziare al sistema dei piani seganti, ed impiegare superficie curve, non rinunzia al sistema dei piani nel caso in quistione, in cui fa mestieri rinunciarvi daddovero e per ottener una elegante soluzione e per non andare incontro ad una improba fatica. Servendosi egli del sistema dei piani orizzontali trova l' intersezione di ciascuno di essi colla superficie di rotazione, ch' è un cerchio, o colla superficie cilindrica, ch' è una curva identica alla sua traccia sul piano orizzontale di proiezione (curva che insegna a costruire con un lemma), ed indi ne conchiude che i punti di comune tra il cerchio, e questa curva, trovandosi e sulla superficie cilindrica e sulla superficie di rotazione, apparterranno alla loro comune intersezione. Don-

(1) Geometria di Sito, n. 190.

d' emerge che per ciascun piano segante fa di mestieri costruire nientemeno una curva identica alla traccia del cilindro. Egli è vero che protrebbesi abbreviare la fatica dilucidando la traccia del cilindro; ma anche con questa abbreviazione questo metodo non cesserebbe di esser difettoso ed in teoria ed in pratica.

52. Il secondo esempio si trova nella *intersezione di una superficie conica data di sito con un' altra di rivoluzione intorno ad un asse verticale anche data di forma e di sito* (1).

Le superficie da adoperarsi in questa soluzione sono le coniche aventi per vertici il vertice del cono dato, e per direttrici i paralleli della superficie di rivoluzione. Ciascuna di queste superficie coniche intersegando la superficie conica secondo linee rette, è chiaro che i punti, in cui queste rette incontreranno il parallelo scelto per direttrice, esistendo tanto sulla superficie di rivoluzione, quanto sulla cilindrica, dovranno appartenere alla loro comune intersezione.

L' Autore della Geometria di Sito, invece di servirsi delle superficie coniche, si serve del solito sistema dei piani orizzontali, ciascuno dei quali tagliando la superficie conica secondo una curva simile alla base (che impara a costruire con un lemma), e la superficie di rivoluzione secondo un cerchio, è costretto a costruire per ciascun piano segante una curva simile alla base del cono, la quale dovendosi effettivamente costruire, rende la costruzione della curva cercata faticosissima, e la soluzione poco elegante.

Le intersezioni di una superficie di rivoluzione con una superficie cilindrica o conica sono di una grande importanza nella pratica, perchè servono a determinare l' ombra portata sulle superficie di rivoluzione, presentandosi la prima nel caso che il punto luminoso è a distanza infinita, la seconda nell' ipotesi che il punto luminoso è a distanza finita. Se l' Autor della Geome-

---

(1) Geometria di Sito, n. 194.

tria di Sito non fosse stato privo di quelle nozioni di mestiere che debbono formare la base delle sue applicazioni di questa scienza alla determinazione delle ombre, non avrebbe recate le due soluzioni poco anzi accennate, perchè ineseguibili nella pratica, o se le avesse recate, avrebbe scelto il sistema delle superficie cilindriche e coniche, anzi che quello dei piani.

53. Il terzo caso ci vien presentato nella soluzione del problema:

Construire l'intersezione di due superficie di rivoluzione (1).

Gli assi di queste due superficie sono entrambi paralleli al piano verticale di proiezione, ed uno di essi perpendicolare al piano orizzontale di proiezione. Se in questo caso si fosse scelto il sistema de' piani orizzontali, sarebbesi ottenuto un punto della comune intersezione cercata, trovando l'intersezione del cerchio secondo il quale ciascuno dei piani taglia la superficie di rotazione ad asse verticale colla curva secondo la quale taglia la seconda superficie di rotazione, il cui asse è inclinato al piano orizzontale di proiezione. Ond'è che per ciascun piano orizzontale bisognerebbe descrivere la curva, secondo la quale la superficie di rivoluzione ad asse inclinato è tagliata da un piano, e un cerchio la cui descrizione è la più facile di tutte le linee.

Nella Geometria di Sito non si sceglie il sistema de' piani orizzontali, ma bensì quello dei piani perpendicolari all'asse della superficie, ch'è inclinato al piano orizzontale. Scegliendo tal sistema di piani, si dee per ciascun piano segante descrivere la curva, secondo la quale esso taglia la superficie di rivoluzione ad asse verticale, e la ellisse proiezione del cerchio secondo il quale lo stesso piano taglia l'altra superficie di rotazione; ellisse, che potevasi benissimo evitare col sistema de' piani orizzontali. Ora la descrizione effettiva di tante el-

---

(1) Geometria di Sito, n. 197.

lissi, per quante ve ne abbisognano per la descrizione della comune intersezione richiesta non è mica una bagattella. Dacchè l'Autore della Geometria di Sito ha mostrato che la proiezione di un cerchio è una ellisse, di cui l'asse maggiore pareggia il diametro, ed il minore sta al diametro come il raggio al coseno dell'angolo d'inclinazione del cerchio al piano di proiezione (1), si crede di aver descritta l'ellisse, avendo trovati gli assi. Ciò è vero astrattamente parlando; ma allorchè si viene alla esecuzione fa d'uopo descrivere realmente l'ellisse, e qualunque descrizione si voglia usare è dessa sempre meno precisa e più faticosa di quella del cerchio.

(1) Geometria di Sito, n. 196.

CAP. X.

Il sig. Flauti critica la soluzione del Monge, con cui questi mena per una retta data un piano tangente ad una superficie di rotazione. Sue due soluzioni. Insussistenza de' difetti criticati dallo stesso nella soluzione del Monge. Vera ragione, per la quale i Geometri posteriori al Monge hanno tralasciata la soluzione di questo geometra, benchè elegantissima.

54. Non possiamo affatto persuaderci, come il sig. Flauti, il quale sa tanto apprezzare le cose degli antichi in materia geometrica, e quelle del Sig. Fergola loro seguace, possa poi leggere con indifferenza le cose più belle della Geometria Descrittiva del Monge, e spesso crederle cattive, e perciò criticarle. Una delle soluzioni più elegantemente trattata nella Geometria Descrittiva del Monge è quella, con cui il Geometra francese mena per una retta data un piano tangente ad una superficie di rotazione. Eppure con universale stupore il Discepolo del Fergola osa criticarla così:

La soluzione recata al precedente problema sebbene fondata sugli stessi principii che quella del Monge, è però più elegante di questa, in cui si ha bisogno di costruire per punti l' intersezione del piano per l' asse colla superficie del cilindroide; ed inoltre la citata soluzione del Monge aveva bisogno di essere rischiarata moltissimo nei principj che constituiscono i passaggi della costruzione di essa, senza di che sarebbe restata oscura, e come fondata su principj arbitrariamente assunti (1).

55. Vediamo intanto come ci risolve questo problema, ed evita i difetti criticati nella soluzione del

(1) Geometria di Sito, n. 359.

Monge colle due soluzioni da lui recate a questo stesso problema. La prima che vien riportata nella sua Geometria Descrittiva stampata a Roma poggia sulla falsa supposizione che due rette parallele ad un medesimo piano esistano nello stesso piano. In fatto, dopo aver egli preso per piano orizzontale di proiezione il piano perpendicolare alla retta data (fig. 15.) (*d*, *D' d'*) e per piano verticale di proiezione il piano, che passa per l'asse della superficie di rotazione, di cui *a'e'b'* è la generatrice, e menato per l'asse *C'a'b'*. un piano perpendicolare al piano verticale di proiezione, e trovato il punto *D*, ov' esso taglia la retta data (*d*,*D'd'*), soggiugne :

Or se concepiscasi tirata pel punto D *una tangente* DE *alla curva* a'Eb'; *è chiaro, che essendo l'altra generatrice della superficie proposta, che passa pel punto di contatto* E, *un cerchio perpendicolare al piano* hC'd'; *debba perciò la tangente di questa generatrice in esso punto* E *esser perpendicolare allo stesso piano* hC'd' *e quindi parallela all'altro di proiezione verticale. Dunque esistono in un sol piano questa tangente e la retta di sito* Dd ; *e dovendo in questo piano trovarsi anche la tangente* DE, *sarà esso il piano tangente cercato*; *e la sua traccia orizzontale sarà quella retta che passa per* d, *e per quell' altro punto in dove la tangente* DE *incontra il piano orizzontale* (1).

56. La seconda soluzione è la stessa, stessissima di quella del Monge, e l'Autore della Geometria di Sito, non potendo ciò negare, dice che la sua soluzione sia fondata *sugli stessi principii che quella del Sig. Monge.* Ma se la soluzione del sig. Flauti nel fondo è la stessa che quella del Monge, non è breve, originale, elegante ed indipendente dalle teoriche sul cilindroide, come questa ultima. Il principale difetto, che si rinviene nella soluzione del Monge, è che non si fa in essa menzione della natura della curva d'intersezione della

---

(1) Geometria Descrittiva, n. 76.

superficie di rotazione generata dalla retta data col piano verticale, che passa per l' asse. Ma chi è colui che ignora che la retta, che gira attorno un' altra verticale serbando da essa la medesima distanza e la medesima inclinazione col piano orizzontale, generi l' iperboloide di rotazione ad una falda, e che quindi la sezione prodotta da un piano passante per l' asse sia una iperbole, dalla quale per conseguenza può considerarsi generata l' iperboloide medesima? D' altronde ammesso ancora che qualchedno non avesse presente la detta generazione dell' iperboloide di rotazione ad una falda, faceva di mestieri che *si stabilissero delle teoriche sul cilindroide per aprirsi la strada alla soluzione del problema in quistione* (1) per appurare che la curva descritta dal Monge fosse una iperbole conica? Bastava dare nn colpo d' occhio sulla figura del Monge (fig. 16.) per vedere che

$$\overline{tf}^2 : \overline{sn}^2 :: \overline{et'}^2 : \overline{s'n'}^2 :: \overline{de}^2 : \overline{dn'}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{DN}^2 ;$$

$$\text{ma } \overline{DE}^2 = (2.AR + RF)\,RF = (2.or + rt)\,rt,$$

$$\text{e } \overline{DN}^2 = (2.AR + RN')\,RN' = (2.or + rs)\,rs,$$

$$\text{dunque } \overline{sn}^2 : \overline{tf}^2 :: (2.or + rs)\,rs : (2.or + rt)\,rt,$$

ch' è appunto la proprietà, che caratterizza l' iperbole.

57. Confessando il sig. Flauti che la sua soluzione sia fondata sugli stessi principî che quella del Monge, soggiunge (non sappiamo con quanta delicatezza) che la sua è più elegante di quella del gran Geometra Francese, perchè questi construisce l' intersezione del piano, che passa per l' asse colla iperboloide ad una falda

(1) Introduzione alla Geometria di Sito, pag. 28.

Digitized by Google

per assegnazione di punti, laddove egli, avendosi aperta la strada alla soluzione del problema in quistione, non la costruisce affatto; ma si contenta soltanto di dire trovati gli assi si descriva l'iperbole conica. Domandiamo di grazia come si fa per descrivere l'iperbole conica, venendo alla costruzione effettiva delle tracce del piano tangente richiesto? *Dal detto al fatto*, si suol dire, *v'è un gran tratto*: altro è dire si descriva l'iperbole, ed altro è descriverla effettivamente, come si dee praticare dal Geometra descrittivo. Pertanto construendo effettivamente l'iperbole, come viene descritta dal Monge, riesce facilissima la descrizione per assegnazione di punti ed esattissima, perchè i punti vengono determinati da rette, che intersegansi ad angolo retto. E quì cade in acconcio il riflettere che quando il celebre Monge scrivea la sua aurea Geometria Descrittiva, la scrivea descrivendo ed eseguendo effettivamente le costruzioni senza lasciarle nel campo delle astrazioni, e nello scrivere e descrivere i suoi pensamenti, procurava di generalizzare questo importantissimo ramo delle matematiche, rendendolo facile ed alla portata anche di coloro, che non conoscevano la Geometria Analitica, o le Sezioni Coniche; e perciò evitava l'impiego di queste. Ma quello, ch'è veramente strano e bizzarro, è, che si è giunto a dubitare che il Monge avesse ignorato che la curva da lui descritta fosse una iperbole, dacchè ha tralasciato di avvertirlo. Or domandiamo noi per quale oggetto dovea avvertirlo? Forse per descriverla più facilmente? no; giacchè la descrizione del Monge di questa curva è più facile di qualunque altra, non esclusa, quella che si potrebbe avere per via del moto continuo del filo, la quale è bella a dir in astratto, non in concreto; avvegnachè la descrizione delle curve coniche per mezzo del moto continuo del filo può praticarsi con qualche precisione soltanto nella ellisse, e nel solo caso, in cui la sua area sia di una grande estensione. Dovea avvertirlo forse per non essere capito dal giovine privo della conoscenza delle Sezioni Coniche? Dovea avvertirlo infine per descrivere l'iper-

bole con parole soltanto? Queste ragioni sono più che sufficienti per giustificare il silenzio del Monge sulla natura della curva da lui descritta, la quale per altro si legge, come si è fatto avvertire, nella stessa sua figura.

58. La soluzione del celebre Geometra francese è così ingegnosa, elegante e chiara, che qualunque geometra dell' antichità non isdegnerebbe di accettarla per sua. Eppure il sig. Flauti ne va dicendo che aveva bisogno di essere rischiarata moltissimo. Dove però è la oscurità? Dove le dilucidazioni da lui fatte? Dove infine i principî arbitrariamente assunti?

La poca chiarezza della soluzione del Monge per l'analisi geometrica, dice lo stesso Flauti, *era stata forse il motivo che aveva indotto la maggior parte de' Geometri Descrittivi a trascurare nelle loro instituzioni di questa scienza il suddetto problema, ch' è il principale della teorica de' piani tangenti le superficie curve* (1).

Ora se la soluzione, di cui è parola, avesse avuto bisogno di esser resa più facile e chiara per l' analisi geometrica, i geometri Hachette, Vallée, Leroy l'avrebbero saputo rendere più chiara e facile. Il vero motivo, per cui i Geometri Descrittivi hanno trascurata nelle loro instituzioni di Geometria la soluzione del Monge, è che la determinazione del punto di contatto del piano tangente colla superficie di rivoluzione riesce poco precisa, perchè risulta dal contatto della tangente comune a due curve colla curva generatrice, determinazione, che non può riuscire molto precisa, perchè questa tangente si confonde per un tratto sensibile colla curva generatrice data: Gli è quindi che i Geometri hanno tralasciata nelle loro instituzioni di Geometria la soluzione del primo Geometra Descrittivo, benchè elegantissima in teoria, ed hanno adottate altre soluzioni, sono riusciti ad evitare. Ecco a che si riducono queste altre soluzioni.

(1) Introduzione alla Geometria di Sito, pag. 28.

Digitized by Google

Si descriva una superficie conica avente il suo vertice sulla retta data tangente alla superficie di rotazione. È chiaro che il piano menato per la retta data tangente a questa superficie conica dovrà riuscire ancora tangente alla superficie di rotazione, ed il punto di contatto dovrà per conseguenza esistere sulla curva di contatto della superficie conica con quella di rotazione. Similmente si descriva una seconda superficie conica avente per vertice un'altro punto della retta data tangente alla superficie di rotazione. È evidente che il piano menato per la retta data tangente a questa altra superficie conica dovrà riuscire ancora tangente alla superficie di rotazione, ed il punto di contatto dovrà esistere sulla curva di contatto di questa superficie colla superficie di rotazione. Ora è chiaro che il punto di contatto del piano cercato con la superficie di rotazione, dovendosi trovare tanto sulla prima curva di contatto, quando sulla seconda, sarà quello ove esse s'intersegheranno.

Si può ancora descrivere una sola di queste superficie coniche ed invece dell'altra, si può descrivere una superficie cilindrica tangente la superficie di rotazione, la cui generatrice sia parallela alla retta data (1).

Quantunque le soluzioni accennate sieno meno eleganti di quella del celebre Monge, dovendosi costruire due curve, la costruzione di ciascuna delle quali riesce più faticosa della costruzione dell'iperbole descritta dal Monge, pure i valentissimi geometri Hachette, Vallée, Leroy l'hanno preferita alla prima, e ciò, perchè il punto di contatto del piano tangente cercato colla superficie di rotazione viene ad esser determinato dalla intersezione delle due curve di contatto, la quale non lascia alcun dubbio sul vero punto di contatto.

(1) Leroy, Géométrie Descriptive n. 95.

CAP. XI.

Alcuni scrittori dopo il fatto trovano ogni cosa chiara negli antichi. Cattiva definizione delle superficie plectoidi, *e false conseguenze, che ne derivano. I moderni non hanno mai opinato che la doppia generazione dell' iperboloide ad una falda e della paraboloide iperbolica per una retta fosse sì intuitiva, che potesse passare senza dimostrazione. Dimostrazione erronea della doppia generazione delle plectoidi a direttrici rettilinee per una retta. A ciascun punto di una superficie storta può menarsi un sol piano tangente.*

59. Alcuni scrittori portati ad esaltare i morti sempre a spese de' vivi trovano dopo il fatto ogni cosa negli antichi. È bello il vedere com' essi nell' *Eliopila* di Vitruvio trovano la conoscenza della forza prodigiosa del vapore, non che l'applicazione allo macchine; nelle parole di Seneca *poma per vitrum adspicientibus multo majora sunt* scorgono i cannocchiali, e nelle altre *remus in tenui aqua fracti speciem reddit* ravvisano le leggi della rifrazione della luce (1). In quanti e quanti luoghi poi dei classici antichi non trovano la bussola? L' otre de' venti di Eulo per essi altro non significa che la bussola. La voce *Vorsoria* usata da Plauto in questi due luoghi

Huc secundus ventus nunc est; cape modo Vorsoriam (2).
. . . . *Cape Vorsoriam*
Recipe te ad herum (3).

altro non può dinotare a parer loro che la bussola. La stessa favola di Prometeo nipote di Japeto non presenta loro che la bussola (4). In una parola questi scrit-

(1) Quaest. Nat.
(2) In Mercatore, act. 5. sc. 2. v. 34.
(3) In trinum. act. 4. sc. 3. v. 19. 20.
(4) Questa opinione è del rinomato Marcello Scotti. Egli mostra nel suo Catechismo Nautico a pag. 49. che con po-

Digitized by Google

tori, dice il Bossut, vogliono assolutamente che gli antichi abbiano tutto inventato, e che non ci abbiano lasciato che la miserabile gloria d'indovinarli e commentarli (1).

60. Uno di tali scrittori è senza dubbio il signor Flauti. Egli, dopo aver desnnte dai moderni le più importanti conoscenze sulle superficie storte, vede chiaro e manifesto ciocchè non videro il Commandini, il Montucla, e tutti gli altri geometri, o sia che gli antichi avessero una perfetta conoscenza delle snperficie denominate *plectoidea*, e che qneste fossero quel-

---

ca avvedutezza gl'intepetri hanno dato all' *ignem*, che si legge nel passo di Orazio *Audax Japeti genus ignem fraude mala gentibus intulit. Post ignem aetherea domo subductum* ec. la significazione di fuoco, e che altro non può significare che costellazione, come nell'altro luogo dello stesso Orazio *inter ignea luna minores*. Che questo *ignis*, fuoco sia stato accolto *in concava ferula*, in una canna vota, è un errore, non essendo mai credibile che Prometeo tanto savio e penetrante avesse voluto affidare un sì attivo elemento ad nna debole canna che ad un tratto poteva rimanere incenerita. Traducendo egli le parole di Esiodo εν χοιλω ναρθηκι non in *concava ferula*, come generalmente traducono; ma *in concavo vasculo* ne deduce la bussola, ed ecco in che modo: *Prometeo andato in Cielo aveva rapito* ignes, *cioè le due costellazioni celebri, la maggiore e la minore Orsa, e l'avea racchiuso in un vasello ed arnese, facendone un regalo ai mortali. Cioè insegnò loro il modo utile ed agevole di valersi della virtù direttiva della calamita, che compiva ai naviganti lo stesso uffizio, che le stelle polari a' tempi loro.*

Questo tratto del Catechismo Nautico darebbe una certa plausibilità alla remota antichità della bussola, se non si dovesse ammettere coll'Autore stesso che questo strumento siasi in seguito perduto; talmente che giungesse a passare per suo inventore Flavio Gioia Amalfitano, ammissione al certo poco credibile, poichè non è affatto da presumersi che nno strumento indispensabile per la navigazione siasi perduto, mentre l'uso di navigare non si perdè giammai.

(1) Essai sur l'Hist. générale des Mathématiques, tom. I.

le medesime, che i moderni appellano *storte* (1). Per avvalorare sempre più la sua asserzione conia a suo capriccio una definizione di siffatte superficie, e la spaccia o come antica, o come dedotta dagli antichi. La sua definizione è questa:

Se una retta si vada movendo nello spazio, radendo una data curva con una legge costante dalla quale però non risulti ch' essa debba passare per un dato punto, o essere costantemente parallela ad una retta di sito, e nè anche che tutti i punti di essa descrivano periferie di cerchi intorno ad un medesimo asse; la superficie che descriverà la chiameremo plectoide *cioè complicata, e ciò seguendo gli antichi* (2).

61. Da questa definizione si deduce immediatamente che l'iperboloide di rotazione ad una falda potendosi considerare generata da una retta, che si appoggia alla circonferenza di un cerchio senza incontrare l'asse elevato dal centro normalmente al suo piano e si muove, in modo che tutti i suoi punti descrivono periferie di cerchi aventi i loro centri sull' asse medesimo, non sia una superficie storta, quantunque due posizioni consecutive della generatrice non istiano in un medesimo piano, poichè la retta generatrice si muove, in modo che tutti i suoi punti descrivono periferie di cerchi intorno ad un medesimo asse.

62. Tutte le superficie generate per una retta che si muove, in modo che due posizioni consecutive di essa non istiano nel medesimo piano, si dicono *storte*. Da questa semplice definizione fluisce immediatamente che

---

(1) Posto che le *plectoides* degli antichi fossero le storte de' moderni il Commandini non poteva ciò indovinare, nè il Flauti se ne dovrebbe maravigliare, perchè a tempo di questo geometra non esistevano le superficie storte de' moderni, e se il Sig. Scorza potè travedere che la retta *LI*, che si dice da Pappo essere in una superficie plectoide, sia in una superficie storta, egli è perchè sapeva da' moderni che la retta *LI* di Pappo genera il sotto-scale, ch'è una superficie storta.

(2) Geometria di Sito, n. 281.

siffatte superficie non possono essere sviluppabili, avverandosi in queste ultime la condizione opposta o sia l'incontro di due posizioni consecutive della generatrice. Ora siccome tutte le superficie generate da una retta, la quale si muove, in modo che nel suo movimento resti sempre tangente ad una curva a doppia curvatura, sono evidentemente sviluppabili, incontrandosi a due a due le tangenti sulla curva, che n'è lo spigolo di regresso, così esse non potranno essere storte. Laonde prende una svista il sig. Flauti, allorchè dice;

. . . . . .

e tale (ossia storta) *è anche l'altra superficie che vien formata dalle infinite tangenti che si conducono alla spirale cilindrica* (1).

Dopo aver escluso per la definizione data al n. 281 dal numero delle superficie storte l'iperboloide di rivoluzione ad una falda, di cui due posizioni consecutive della retta generatrice non s'incontrano; dopo aver incluso al n. seguente 282 tra le superficie storte la superficie generata da tutte le tangenti condotte alla spirale cilindrica, di cui due tangenti consecutive s'incontrano, soggiugne lo scolio non aspettato:

È facile ravvisare che per due siti prossimissimi, in cui si ritrovi la generatrice di una superficie plectoide non possa mai passarvi un piano (2).

Abbiamo detto lo scolio non aspettato, perchè non risulta dalle premesse, dalle quali risulta tutto altro, e se l'autore della Geometria di Sito facilmente ravvisa che due posizioni consecutive della generatrice non possono esistere nello stesso piano, egli è perchè ciò sapeva da' moderni analisti, i quali definiscono le superficie storte per quelle, che sono generate da una

(1) Geometria di Sito, n. 282.
(2) Idem, n. 283.

retta la quale si muove in modo che due sue posizioni consecutive non istiano nello stesso piano.

63. Se una retta si muove, in modo che si appoggi costantemente a tre linee date di sito, che chiamansi *direttrici*, perchè ne dirigono il movimento, essa genera una superficie storta, purchè però le tre direttrici abbiano relazioni tali da escludere che due posizioni consecutive della generatrice sieno in un medesimo piano. Nel caso particolare, in cui le tre direttrici sono linee rette, la superficie storta diventa l'iperboloide ad una falda, o la paraboloide iperbolica.

Se tre posizioni qualunque della generatrice si scambiano colle tre direttrici, ed una qualunque delle tre direttrici si prenda per generatrice, ne risulterà sempre la medesima superficie. Egli è questo un teorema di grande importanza per la determinazione de' piani tangenti alle superficie storte in generale; e però vien rigorosamente dimostrato da tutti i Geometri descrittivi Francesi, come Vallée (1), Leroy (2), e se non trovasi in qualche istituzione di Geometria Descrittiva, egli è perchè i loro autori come Monge ed Hachette han saviamente lasciata la dimostrazione di tal teorema alla Geometria a tre coordinate, la quale brevemente il dimostra, laddove la sua dimostrazione sintetica è molto lunga e penosa, come può riscontrarsi nelle citate Geometrie Descrittive di Vallée e Leroy. Mai però i Geometri descrittivi Francesi han opinato che il teorema, di cui è parola, fosse sì intuitivo, che potesse passare senza dimostrazione, come asserisce il Sig. Flanti (3), ed in pruova di ciò citiamo i n. 128. 136. dell'Applicazione dell'Algebra alla Geometria de' Sig. Monge e Hachette, in cui è riportata la dimostrazione analitica di questo importantissimo teorema.

---

(1) Géométrie Descriptive, n. 234, 235.
(2) Géométrie Descriptive, n. 513 . . . 517.
(3) Geometria di Sito, n. 289.

Digitized by Google

Smentita in tal modo l' accusa del Sig. Flauti contro i Geometri descrittivi francesi passiamo a vedere cosa ei pensa intorno a questo teorema tanto nella sua Geometria Descrittiva, quanto nella Geometria di Sito. Nella prima egli caratterizza la doppia generazione dell' iperboloide ad una falda sì intuitiva, che la lascia senza dimostrazione, contentandosi di dire solamente:

La prima genesi segue evidentemente dalla definizione, che si dà di essa superficie: la retta mobile si appoggia costantemente su di tre rette date. L' altra si deduce dalla prima; poichè se tra tutti i lati di una tal supesficie se ne prendano tre ad arbitrio, e si considirino questi tre come delle nuove direttrici; la retta mobile potrà per generar essa superficie appoggiarsi costantemente anche su di questi (1).

Nella Geometria di Sito di data molto posteriore alla sua Geometria Destrittiva l' Autor invece di accusar se stesso per aver creduta la doppia generazione dell' iperboloide ad una falda sì intuitiva da poterla lasciare senza dimostrazione, ne va incolpando ingiustamente i Geometri descrittivi Francesi dopo averne recata la seguente dimostrazione.

Sieno (fig. 17.) *AB*, CD, EF *le tre rette, che rappresentano le direttici della proposta superficie plectoide, ed* ab, cd, ef *tre suoi lati ad arbitrio, e di essi il lato* cd *interseghi la direttrice* CD *in* O. *Ciò posto si prenda nella* AB *un qualunque altro punto* A *pel quale corrisponda su tal superficie il lato* XY; *esisterà questo lato sul piano* PCD, *cioè condotto per lo punto* P, *e per la retta* CD. *Che se al contrario si supponga preso nella* ab *un qualunque altro punto* p, *pel quale si supponga passare la retta* xy, *che si appoggi sulle tre altre* ab, cd, ef *prese, come direttrici: egli è chiaro che tal retta esisterà nel piano condotto per lo punto* p, *e per la* dc. *Or*

---

(1) Geometria Descrittiva, n. 52.

questi due piani PCO , e pco *debbono necessariamente intersegarsi , poichè hanno di comune il punto* O. *Laonde si dovranno anche intersegare in qualunque punto* Z *le rette* XY , xy *che sono in essi, e dalle quali essi si concepiscono descriversi. E dimostrando similmente ecc.* (1).

Questa dimostrazione poggia evidentemente in falso , giacchè l' incontro di due piani non porta seco quello delle rette esistenti respettivamente in essi : anzi è chiaro che esse non s' incontrano se non nel caso particolarissimo , in cui incontrano la comune sezione de' due piani nello stesso punto.

64. Passiamo avanti: Poichè per ciascun punto dell' iperboloide ad una falda o paraboloide iperbolica passano due rette per la doppia generazione , ne segue che per menare un piano tangente a cotesta superficie in un punto dato, basta far passare per detto punto le due rette relative alla sua doppia generazione , e condurre per esse il piano, che dovrà riuscire tangente alla detta superficie nel punto dato.

Sapendo menare un piano tangente ad una iperboloide ad una falda si potrà menare un piano tangente ad una superficie storta qualunque , perchè questo secondo caso si rimena al primo. Rappresentino (fig.18.) MEN, $M'E'N'$, $M''E''N''$, le direttrici di una superficie storta , e si cerca di menare per lo punto Z il piano tangente. Per li punti E , E', E'', in cui la generatrice incontra le direttrici , si menino le tangenti ET, $E'T'$, $E''T''$. Si construisca l' iperboloide che abbia per direttrici queste tre tangenti. È facile il dimostrare che il piano tangente a questa iperboloide nel punto Z , dovrà esserlo ancora alla superficie storta nello stesso punto.

Premesse siffatte cose, il sig. Flauti ne deduce la non immaginabile conseguenza che ad ogni punto di

(1) Geometria di Sito, n. 287.

una superficie storta debbano corrispondere infiniti piani tangenti diversi. Ecco in che modo:

(Fig. 18) *Si è veduto nel n. 293. che la superficie plectoide, la quale ha per direttrici de' suoi lati le tre linee rette* ET, E′T′, E″T″ *può essere toccata da un piano che passa per la* EE″ *negli infiniti punti di questa linea retta. Laonde la proposta superficie plectoide generale, cioè quella che ha per direttrici de' suoi lati le tre curve* MEN, M′E′N′, M″E″N″ *potrà similmente essere toccata da un piano che passi pel suo lato* EE″ *negl'infiniti punti di tal linea retta. Or si prendano in questo lato* EE″ *i tre punti* E,E′,E″ *ad arbitrio, e si determino que' tre piani che passano per siffatto lato, e toccano la proposta superficie plectoide il primo in* E, *l'altro in* E′, *ed il terzo in* E″; *è chiaro che conducendosi per questi punti in ciascuno di quei piani tangenti una linea retta, tali rette potranno dinotare le direttrici di una superficie plectoide tangente la proposta nel lato* EE′E″. *E siccome quelle tre linee rette in quei piani rispettivi possonsi condurre ad arbitrio, così è chiaro che vi saranno infinite superficie plectoidi a direttrici rettilinee, che toccheranno la stessa superficie plectoide generale proposta lungo il suo lato* EE′E″; *e ciascuna di esse dovendo avere per ogni punto della* EE″ *un piano tangente, che lo sia anche della superficie plectoide generale, ne segue perciò che a questa gli debbano corrispondere per ogni punto di essa infiniti piani tangenti diversi* (1).

Questo raziocinio equivale a questo altro: al punto Z della curva AB si possono menare infiniti cerchi tangenti; ma a ciascun cerchio si può menare una retta tangente in Z, dunque al punto Z della curva AB si possono menare infinite rette tangenti diverse. E se poco anzi abbiamo detto non immaginabile conseguenza si era nel dritto di dire ciò, avvegnachè se il piano tangente ha di comune colla superficie, cui è

(1) Geometria di Sito, n. 297.

tangente una faccetta, come questa faccetta può immaginarsi comune ad infiniti piani diversi? Se i coefficienti

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ dell'equazione del piano tangente

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y')$$

nel punto x', y', z' la superficie data dall' equazione

$$f(x, y, z) = o$$

sono determinati in funzione delle coordinate x', y', z' del punto dato, e delle costanti ch'entrano nell'equazione della superficie, come mai potranno essi avere infiniti valori?

CAP. XII.

*Nella generazione dell' epicicloide sferica tutti i raggi, che dal centro del cerchio mobile si tirino a' punti di contatto dello stesso coll'immobile costituiscono una superficie conica, non già cilindrica. La dimostrazione, onde appurare se una curva sia a semplice o doppia curvatura è poco soddisfacente. La denominazione d'*hyperboloïde de révolution à une nappe *de' francesi vien mal a proposito caratterizzata per bizzarra. I moderni hanno avvertito prima che fosse comparsa la Geometria di Sito l' identità del cilindroide del Wallis coll' iperboloide di rivoluzione ad una falda. Si criticano le soluzioni analitiche su le piramidi triangolari dell' immortale Lagrange, perchè non se ne comprende l' estensione e lo scopo. Di un neo, che esiste nella Geometria Descrittiva di Monge. Conchiusione.*

65. Se due coni hanno per vertice comune il centro di una sfera e per basi due cerchi della stessa sfera tangenti fra loro esternamente, e si suppone che uno di essi roti intorno all' altro, un punto qualunque della circonferenza del cerchio mobile genererà sulla superficie sferica una curva denominata *epicicloide sferica*.

Se si proiettino i due coni mobile ed immobile sul piano che passa per l' asse del secondo, e per lo lato di contatto, le loro proiezioni saranno rappresentate da' due triangoli (fig. 19.) *AOB*, *AOC*. Ora è chiaro che l' inclinazione del cerchio mobile sull' immobile è quanto l' angolo *EOF* degli assi de' coni perpendicolari a' piani de' cerchi; ma *EOF* è uguale ad *EAF*, il quale è l' angolo d' inclinazione del raggio del cerchio mobile tirato al punto di contratto de' due cerchi col piano del cerchio immobile. Laonde tutti i raggi, tirati dal centro del cerchio mobile ai punti ov' esso tocca l' immobile essendo egualmente inclinati

al piano di questo, e il loro prolungamento passando per lo stesso punto I dell'asse del cono immobile, constituiranno la superficie di un cono troncato, di cui la proiezione verticale è rappresentata dal trapezio $GFAB$.

Il Sig. Flauti, il quale crede di porre nelle ricerche che intraprende sulla epicicloide sferica tutto quel rigore che la buona Geometria esige (per buona Geometria ei intende l'antica, la moderna è cattiva) dopo aver dimostrato n. 237 che l'angolo formato dal raggio del cerchio mobile tirato al punto ov' esso tocca l'immobile è costante, soggiugne il seguente notabilissimo corollario:

Che perciò è chiaro che tutti quei raggi che dal centro del cerchio mobile si tirino a' quei punti, ov' esso tocca il cerchio immobile, inclinandosi sotto uno stesso angolo al piano di questo, rappresentino i lati di una superficie cilindrica, la cui base è il cerchio immobile; ed il centro del cerchio percorrerà per conseguenza su questa superficie cilindrica un arco di cerchio eguale e parallelo alla base dell' epicicloide sferica;

Dunque dal perchè una retta nel suo movimento s'inclina sempre sotto lo stesso angolo, essa genera una superficie cilindrica. Ecco che la condizione del parallelismo de' lati del cilindro non è più necessaria.

Finiamo di trascrivere il paragrafo;

Ed il centro del cerchio mobile percorrerà per conseguenza su questa superficie cilindrica un arco di cerchio eguale e parallelo alla base dell' epicicloide sferica (1).

La sola ispezione della figura mostra che il cerchio gererato da NF non può essere uguale alla base del cono immmobile, cerchio che ha per raggio EA. Ma questa osservazione è ridicola pe' nostri sintetici, i quali, ascoltando la sola alma ragione, si bendano gli occhi.

---

(1) Geometria di Sito, n. 238.

66. Per appurare se una curva sia a semplice oppure a doppia curvatura, qualora son date le sue proiezioni, i moderni impiegano il calcolo differenziale (1). Il Sig. Flanti risolve questo stesso problema colla sintesi nel modo seguente. Si prendano quattro punti sulla curva e per tre di essi presi ad arbitrio si faccia passare un piano. È chiaro, egli conchiude, che la curva è a semplice o a doppia curvatura secondo che il piano passi o no per lo quarto punto. (2).

Siffatto metodo può fallire; imperocchè un piano può incontrare una curva a doppia curvatura in più di tre punti, ed il metodo esposto cade in difetto sempre e quando i quattro punti presi ad arbitrio sulla curva sono fra quelli, in cui il piano incontra la curva.

67. I moderni geometri Francesi nella discussione generale dell' equazione di secondo grado a tre variabili s' imbattono nell' equazioni

$$a^2b^2z^2 \pm a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2,$$

le quali rappresentano due superficie, alle quali dovevano dare un nome. Intanto considerando essi che siffatte superficie potevansi considerare come generate da iperbole, le chiamarono *hyperboloïdes* in generale. Bisognava però distinguere queste due superficie ben diverse fra loro; e perciò chiamarono la prima *hyperboloïde à deux nappes* per esser essa composta di due parti ben distinte, aventi la forma di una coppa, e chiamarono la seconda *hyperboloïde à une nappe* e per essere rappresentata da una sola superficie, e per distinguerla dalla prima.

Se nell' equazione $a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2$, rappresentante l' *hyperboloïde à une nappe*, si fa $a = b$,

---

(1) Lacroix, Traitè de Calcul Différentiél et Intégrale, quatrième édition n. 161.

(2) Geometria di Sito, n. 211.

tutti i piani passanti per l'asse delle z producendo la stessa iperbola, l'iperboloide può considerarsi generata dalla rotazione di tale iperbola intorno all'asse secondario. La sua denominazione quindi doveva essere una conseguenza della prima, se non che dovevasi in essa introdurre la circostanza della rotazione, e però fu da moderni saviamente denominata *hyperboloïde de révolution à une nappe*. Eppure, chi il crederebbe? il Sig. Flauti caratterizza questa denominazione per bizzarra, perchè gli antichi avevano chiamato *cilindroide l' hyperboloïde de révolution à une nappe* (1).

L'analisi algebrica introducendo *dans la géométrie la généralité, qui lui est propre*, ha fatto conoscere che l'equazione rappresentante il cilindroide del Wallis non era che un caso particolare dell' altra più generale

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2,$$

e che quindi la sua denominazione dovea da questa dedursi. Se i moderni non avessero *bizzarramente* chiamata l' *hyperloïde de révolution à une nappe* il cilindroide del Wallis, doveano essi creare altri nomi per le superficie rappresentate dall'equazioni

$$a^2b^2z^2 \pm a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2$$

e porre tra essi tal nesso, quale esiste tra l' *hyperboloïde à deux nappes, hysperboloïde à un nappe, e hyperboloïde de révolution à une nappe* (2).

---

(1) Geometria di Sito, n. 334.

(2) In una Memoria: *Su di una determinazione più propria delle superficie di secondo grado* il Sig. Flauti sostituisce alla denominazione d'iperboloide ad una falda quella di *superficie cilindroidica iperbolico-ellittica*; perchè questa superficie può considerarsi generata dall'iperbola e dall'ellisse. Secondo questa denominazione il cilindroide del Wallis dovrebbe denominarsi *superficie cilindroidica iperbolico-circolare*, perchè l' ellisse di poc'anzi si è trasmutata in cerchio; eppure non è così;

68. Dopo aver caratterizzata per bizzarra la definizione dell'iperboloide ad una falda de' Geometri Francesi, soggingne che *i moderni non avevano in alcun luogo fatto osservare l'identicità del loro solido con quello del Wallis, quantunque il Newton avesse già fatto osservare nella sua Aritmetica Universale la genesi del cilindroide per una retta, come in appresso mostreremo* (1).

Si fece osservare che bastava dare uno sgnardo sulla figura del Monge per conoscere che la sezione meridiana della superficie generata da una retta attorno un'altra, serbando da questa ultima la medesima distanza e la medesima inclinazione al piano normale alla retta fissa, fosse una iperbole conica, e la superficie da essa generata, l'iperboloide di rotazione ad una falda, o il cilindroide del Wallis. Nello stesso tempo si fece osservare che il primo Geometra Descrittivo non avvertì che la curva da lui descritta per assegnazione di punti fosse una iperbola, perchè nol dovea. Quì ci rimane ad osservare che il valentissimo Hachette infin dal 1813, due anni avanti la prima edizione della Geometria di Sito, ed otto anni avanti la seconda edizione aveva dimostrato che *tra le superficie di secondo grado fornite di centro, l'iperboloide ad una falda è la sola che possa essere generata da una retta mobile, e che questa retta può muoversi in due maniere differenti per generare la medesima iperboloide* (2).

Da ciò si deduce che molto prima che fosse comparsa alla luce la Geometria di Sito, i Geometri Fran-

---

ci ritiene pel cilindroide l'impropria denominazione di cilindroide. e ciò, perchè le sole cose de'francesi non garbizzano al Flauti.

(1) Geometria di Sito, n. 334.

(2) Application de l'Algèbre à la Géométrie par M. M. Monge et Hachette, n. 128.

cesi conoscevano la generazione dell'iperboloide di rotazione ad una falda per una retta ; e perciò non avevano avvertita, ma dimostrata l'identità dell'iperboloide di rotazione ad una falda., col cilindroide del Wallis. Intanto per ciò che si disse nel n. 63. e per ciò che testè si è detto, si trae la conseguenza, che o l'Autore della Geometria di Sito non aveva letto nello spazio di più anni l'importante lavoro del suo amico (1) sulle superficie di secondo grado , o se l'aveva letto è ingiusto verso questo Geometra.

69. Si riportano sei problemi sulla piramide triangolare, i quali sono riportati ancora dal Sig. Hachette (2) , e per mostrarne il Flauti l'importanza dice: *Tra i problemi risoluti in questo Capitolo ve se ne troveranno sei sulla piramide triangolare, che unitamente a quelli già risoluti nel Capitolo* IX. *costituiscono i principali a proporsi su questo solido. E per indicare l'importanza di essi basta dire , che l'insigne analista Lagrange in una sua memoria inserita negli atti di Berlino per l'anno 1773 , ove si occupò a risolverli , per le vie dell'analisi moderna , fortemente si dolse , che i Geometri i quali si erano convenientemente occupati del triangolo rettilineo , non avessero poi fatto altrettanto della piramide triangolare ch'è tra i solidi poliedri lo stesso che il triangolo tra i rettilinei. Ma se tal doglianza del Lagrange è giusta , potrebbe anche a lui ragionevolmente imputarsi , ch'egli non abbia soddisfatto ad una tal ricerca come convenivasi cioè geometricamente , essendo il suo lavoro limitato semplicemente ad offerire gli elementi algebrici onde pervenire all'equazione per tali problemi* (3).

Questa accusa mossa all'immortale Torinese dal-

---

(1) Il Sig. Hachette in tutto il tempo di sua corta vita fu amico del Sig. Flauti, come deducesi dal Rendiconto del 1842, pag. 110.

(2) Supplément de la Géométrie Descriptive, n. 106.

(3) Introduzione alla Geometria di Sito, pag. 23.

Digitized by Google

l'autore della Geometria di Sito mostra chiaramente che egli non abbia compreso nè la estensione, nè lo scopo della memoria intitolata: *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires.* Difatti il Lagrange in questa memoria trova le relazioni generali che passano tra i diversi elementi della piramide triangolare per mezzo delle quali ottiene le formole de' raggi delle sfere iscritte e circoscritte, del centro di gravità, della superficie, della solidità, ecc. di ogni piramide triangolare; trova la piramide triangolare che contenga il massimo volume, allorchè sono date le superficie delle quattro facce, (problema non facile a risolversi colla Geometria degli Antichi); dimostra che il centro di gravità della piramide triangolare è anche il centro di gravità di pesi eguali collocati ne'suoi vertici; trova il valore della diagonale, cioè a dire della retta che unisce i vertici opposti di due piramidi triangolari addossate l'una contro l'altra per le loro basi supposte eguali; fa nell'introduzione alla detta memoria alcune trasformazioni e riduzioni, che possono servire in moltissimi casi; termina infine la sua aurea memoria dicendo: *Par ce moyen de ces formules et de celles que nous avons trouvées précédemment on pourrà résoudre différens problèmes, curieux et nouveaux sur les pyramides triangulaires.*

Da ciò si vede che siffatta memoria contiene quanto di geometrico e di meccanico possa proporsi sulle piramidi triangolari. Il confronto adunque che fa il signor Flauti de' suoi sei problemi (che non esisterebbero neppure se il Lagrange non avesse avvertito il vuoto lasciato da'Geomertri sulle piramidi triangolari) con questa memoria è fuori proposito. Dippiù lo scopo che si prefige Lagrange in questa memoria è di mostrare.

1.° Che l'Algebra applicata alla Geometria è una potentissima leva, onde risolvere le quistioni più astruse di Geometria e che quelle questioni che sembravano per lo innanzi di esclusivo dominio della Geometria potevansi con gran successo e facilità trattare

con l' Algebra. *Independemment*, egli dice, *de l' utilité directe que ces solutions pourront avoir dans pleusieurs occasions serviront principalement à montrer avec combien de facilité et de succes la methode algébrique peut-être employée dans le questions que paraissent être de plus de ressort de la Géométrie proprement dite, et les moyens à être traitées par le calcul.*

2.° Che la Geometria parlando la lingua algebrica si poteva rendere indipendente dal soccorso delle figure, le quali par che rechino un non so che di circoscrizione ne' risultamenti. *Ces solutions sont purement analytiques, et peuvent même entendre sans figures.*

3. Che le quistioni di pura Geometria potevansi ridurre ad un semplice affare di calcolo. *Par ce moyen tout se reduit à un affaire di pur calcul* (1).

Ciò posto, dire che al Lagrange conveniva trattare le sue svariatissime questioni sulle piramidi triangolari con la Geometria e non già con l'Algebra è non comprendere lo scopo di questo analista, il quale non si propone la trattazione di sterili proposizioni di Geometria nella citata memoria ; ma di far vedere con quanto successo si potesse l' Algebra applicare alla Geometria e quanto la moderna maniera di geometrizzare superasse l' antica (2). Ed oltracciò perchè con-

---

(1) Atti di Berlino 1773.

(2) Le Memorie sulle piramidi triangolari e sull' attrazione, che una sferoide ellittica esercita su di un punto qualunque piazzato sulla sua superficie o nel suo interno, sono scritte a posta dal Lagrange per mostrare la superiorità dell' analisi su la sintesi , e per confutare i frivoli argomenti che i detrattori di essa adducono per iscreditarla. Nella seconda delle citate memorie egli risolve con l' analisi algebrica più generalmente e più direttamente il problema dell' attrazione di una sferoide ellittica di quello che aveva fatto il celebre Maclorin con la sintesi , il quale per altro lo risolve tanto bene che lo stesso Lagrange ne paragona la soluzione a tutto ciò che Archimede ci ha lasciato di più bello e di più ingegnoso. *Je me*

veniva al Lagrange trattare le questioni sulle piramidi triangolari con la Geometria e non con l'Algebra? e perchè le questioni di Geometria trattate con l'algebra non sono geometricamente trattate? Non è forse l'Algebra il linguaggio, di cui si vale la Geometria per esprimere più brevemente e più facilmente le sue concezioni?

70 Fra gli altri problemi su le piramidi triangolari vi è quello, con cui si cerca di determinare il vertice di una piramide triangolare della quale son dati i lati della base, e gli angoli al vertice. Benchè su questo problema si fosse parlato tanto che parlarne ulteriormente è aggiugnere arena al mare, pure non possiamo dispensarci di avvertire poche cose.

Questo problema è di 4.° grado, e non già di 8.° come dice il Flauti nella Geometria Descrittiva, nella prima edizione della Geometria di Sito, ed anche nella 2. In questa ultima edizione benchè egli riportasse la bellissima soluzione del Lhuilier e dicesse che il grado di tal problema *resta definitivamente ridotto al 4.° donde risulta ch' esso sia di natura solido e geometricamente construibile*, pure soggiugne imme-

---

propose (dice il celebre Torinese) *dans ce Mémoire de faire voir que bien loin le problème dont il s'agit se refuse à l'Analyse, il peut-être résolu par ce moyen d'une manière sinon plus simple du moyen plus directe, et plus générale que par la voie de la synthèse ; ce qui servira à détruire un des principaux argumens que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pur la rabaisser et pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens.* Atti di Berlino 1773. pag. 122. Eppure questa analisi algebrica che maneggiata da questo uomo era a tanto sufficiente, non fu poi creduta bastevole dalla Scuola Sintetica per la trattazione di elementarissime questioni di Geometria, e fu chiamata *arte combinatoria*. Fergola, *Trattato Analitico delle Sezioni Coniche*, pag. 3. 100. *Pogramma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica.*

Digitized by Google

diatamente appresso *che ciò non ostante il Problema sia effettivomente di 8.° grado*, perchè ogni sua soluzione si scinde in due identiche (1)·Donde si può trarre la singolare conseguenza che il problema sia definitivamente di 4.° grado ed effettivamente di 8.°

Dippiù per riconoscere il grado di questo problema egli stabilisce le tre equazioni

$$a^2-y^2-x^2=\frac{2nxy}{m},$$

$$b^2-z^2-y^2=\frac{2pzy}{m},$$

$$c^2-z^2-x^2=\frac{2qxz}{m},$$

nelle quali a, b, c rappresentano i lati noti della piramide, ed x, y, z il lati ignoti, ed indi conchiude: *Laonde l'equazione al problema sarà l'eliminata di queste tre e quindi dell'8.° grado.* Conchiusione che mostra fiducia nell'Algebra. Lettori, attendete un momento.

Siccome (seguita) *questa soluzione analitica del proposto problema non entrava che per incidenza nel piano della mia opera, così trascurai di ulteriormente spingere il calcolo fino ad ottenere quell'eliminata, che per la natura de' metodi di eliminazione assai imperfetta sarebbe risultata e mi quietai pure sul grado di tal problema dalla seguente considerazione che io feci delle diverse soluzioni delle quali era suscettivo.*

Ecco sparita la fiducia nell'Algebra. (2)·

Non avendo dunque fiducia nell'Algebra ricorre ad alcune considerazioni geometriche, le quali gli fanno conchiudere ciò che gli aveva fatto conchiudere l'Algebra, ossia che il problema ascende all' 8.° grado.

(1) Geometria di Sito. 2. ediz. pag. 308.
(2) Idem. 307.

Donde si può trarre la conseguenza che la Geometria non sia una guida più fedele dell'Algebra. Nelle osservazioni poi che fa alle bellissime soluzioni del Lhuilier attribuisce secondo il solito i diversi errori, in cui sono incorsi i Geometri sul grado di questo problema alla maniera algebrico-geometrica de' moderni. (1) Ma se l'Algebra è stata la causa che ha indotto in errore i geometri, che l'hanno presa per guida in questo problema, domandiamo, quale è stata la cagione che ha indotto nel medesimo errore il Discepolo di Fergola, che recandosi a scorno di far servire l'Algebra alla Geometria si è a questa sola affidato? La Trigonometria e l'Algebra fecero scoprire al Lhuilier che questo problema era di 4.° grado. L'Algebra sola fece scoprire al Sig. Tucci che dall' 8.° grado, che l'era, si abbassava al 4.° Mi si potrebbe dire che il Sig. Tucci pervenne a questo risultamento, perchè già sapeva che l'equazione doveva essere suscettiva di abbassarsi: lo sia pure. Il Sig. Flauti benanche sapeva dietro la soluzione del Lhuilier che il problema era di 4. grado, perchè con la sua Geometria non lo trova di 4. grado? (2).

Nelle medesime osservazioni alle soluzioni del Lhuilier il Flauti dice che il Lagrange *accenna appena gli elementi analitici per tal soluzione senza che neppur di lontano si possa discernere qual sia l'equazione alla quale questi conducono.* Eppure nella memoria del Lagrange vi sono l'equazioni

$$c = a' + a'' - 2\sqrt{(a'a'')}.\,cos.y \;\ldots\; (3)$$
$$c' = a + a'' - 2\sqrt{(aa'')}.\,cos.y'$$
$$c'' = a + a' - 2\sqrt{(aa')}.\,cos.y''$$

(1) Veggasi il 3. Vol. della Reale Accademia delle Scienze di Napoli.

(2) La Memoria del signor Tucci sulla piramide triangolare è di data anteriore a quelle de' signori Bruno, ed Hachette.

(3) Atti di Berlino 1773. pag. 156.

le quali non differiscono in sostanza da quelle riportate da lui che per le lettere.

Le equazioni del Lagrange danno a credere a colpo d'occhio che il problema ascenda all'8° grado. Non pertanto lo stesso Lagrange infin dal 1795 aveva fatto osservare che questo problema fosse di 4.° grado.

71. Benchè la soluzione analitica del problema in questione non entrasse nel piano dell'opera del Sig. Flauti, pure egli ve la pone non per altro motivo se non per far marcare che un Geometra Francese fece ascendere questo problema appena al 2.° grado, e che il celebre Monge, anche Geometra Francese, lo fa ascendere al 64.° nella sua Geometria Descrittiva. Il Monge incorse in questo errore, dal perchè sostituì delle considerazioni sintetiche all'analisi algebrica. *Monge*, dice Hachette, *n'avait pas effectué les calculs, il voulait seulement montrer qu'il a des cas où les considérations syntétiques sont préférables à l'analyse algébrique.* A discolpa però del Monge deesi osservare ch'egli improvisava le sue lezioni nelle Scuole Normali e che facilmente poteva incorrere in qualche inesattezza. *D'ailleurs*, ripiglia Hachette, *on ne saura point étonné que quelques inesactitudes se soient glissées dans les journals des eçoles normales, lorsqu'on saura que les professeurs improvisoient leurs leçons.* Del resto siffatto errore nell'aurea Geometria Descrittiva del Monge è una macchia nella faccia del sole, è un neo nel volto di una venere. Laonde il rimproverare questo errore *usque ad nauseam* (1) al primo Geometra Descrittivo ci sembra una scortesia.

---

(1) Il Flauti fa menzione di questa svista del Monge nella prima edizione della sua Geometria di Sito, ne fa menzione in una sua Memoria inserita nel 1. V. della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, ne fa menzione nelle osservazioni che fa alla Memoria del Lhuilier inserita nel 2. V. della Reale Accademia delle Scienze di

72. Dalle cose dette sulla Geometria di Sito parmi che si possa conchiudere quanto ingiustamente il Flauti sia prevenuto contro i moderni analisti.

Avv. La 2.ª edizione della Geometria di Sito dovea esser seguita da un completissimo *Trattato delle ombre ne' disegni*; ma questo libro creduto perfetto in tutte le sue parti, promesso al pubblico infin dal 1821 non ha veduto ancora la luce.

Napoli, ne fa menzione nelle osservazioni che fa alla Memoria del sig. Hachette inserita nel 3.° Volume della medesima Reale Accademia delle Scienze di Napoli; e Dio sa in quanti altri luoghi!

CAPO XIII.

Scopo della Scuola Sintetica. Opuscolo del sig. Fusco sul quinto Postulato di Euclide. Proposizioni poco esatte enunciate nella prefazioncella di detto opuscolo. Nel primo capitolo si discute lungamente se il quinto postulato di Euclide debbasi chiamare postulato, assioma, o teorema senza venirne a capo. Nel secondo si critica la dimostrazione per mezzo della quale il celebre Legendre dimostra che in ogni triangolo la somma degli angoli è equale a due angoli retti. Nel terzo ed ultimo capitolo si espone la dimostrazione del quinto postulato, la quale è la peggiore di quante ne sono comparse.

73. A torto si va ripetendo aver il grande Socrate disapprovato uno studio troppo profondo nelle matematiche. Il primo filosofo dell' antichità non poteva avere una opinione così poco vantaggiosa della prima di tutte le scienze, della scienza per eccellenza (1). Egli è vero che questo filosofo diceva che quando si conosce tanto di geometria, quanto è sufficiente a misurare il campo, tanto di astronomia, quanto basta per sapersi condurre ne' viaggi di terra e di mare, è più che sufficiente (2); ma con ciò egli intendeva dire che bisognava apprendere quella matematica soltanto che tornava di vantaggio ed utilità alla società e lasciare tutto ciò ch'è di vana speculazione, che al dir di Romagnosi (3), non serve che a pascere la curio;ità dei

(1) La parola Matematica, che nella sua etimologia significa *Scienza*, o *Istruzione*, mostra l'eccellenza di questa scienza. Platone sentì tanto la sublimità di questa scienza che essendo stato interrogato un giorno di che si occupasse la Divinità nel cielo, rispose, a geometrizzare.
(2) Diog. in Socrat. Xenoph. liv. 4 dic. et fac. Socr.
(3) Discorsi sulle Matematiche.

filosofi (1). Socrate aveva ben ragione di dir ciò, perchè a suoi tempi, mentre vedeva tanti geometri, non vedeva poi l' utilità de' loro studî. E per verità con tutto lo entusiasmo che avevano gli antichi per le matematiche, quali vantaggi essi ne ritraevano? quali applicazioni ne avevano fatte alle scienze? Essi non avevano neppure penetrato la grande influenza della matematica su tutte le altre scienze (2). La Scuola Sintetica Napolitana tanto decantata, che affettava di camminare sulle orme della sapienza greca, era tutta dedita alle astrattezze scolastiche. Se si fa il catalogo delle produzioni del Fergola e della sua scuola, non si trovano che compilazioni, traduzioni e questioni di matematica pura di niuno interesse. I giovani a tempo del Fergola invece di studiare le matematiche pure, come mezzo onde apprendere le miste e applicarle a'bisogni della vita, come fanno attualmente, perdevano i migliori anni della loro vita o in quistioni viete o in quistioni di matematica pura, che non potevano gran fatto interessare, e quando giungevano o a modificare qualche antica soluzione, o a risolvere qualche nuovo problema, si credevano già degni di

(1) Si è conosciuto che molte ricerche fatte sopra alcune curve e diverse proposizioni di analisi pura, di cui non si prevedeva affatto l'uso, han servito in seguito alla spiegazione dei più stupendi fenomeni della natura. Ma ciò ch' è conseguenza del caso non deve servir di norma.

(2) La sola astronomia ricevette presso gli antichi qualche soccorso dalla Geometria. L' ardore, con cui fu questa scienza coltivata dagli antichi per le idee religiose che vi attaccavano, non poteva non far loro sentire la grande influenza che ha su di essa la Geometria. Eppure i Greci non erano mica una gran cosa nell'astronomia. Ed in vero Anassimene, che si spaccia per inventore de' quadranti solari, credeva che la terra fosse piatta. Anassagora diceva che il cielo fosse di pietra, che il sole non potesse oltrepassare i tropici, perchè ivi incontrava un'aria troppo densa, che questo astro fosse poco più grande del Peloponneso, ed altre sciocchezze simili. Francoour, Uranographie, 2. ediz. pag. 348.

meritare il lusinghiero nome di Geometra (1). La divisione della sfera per mezzo di un piano in data ragione, la trisezione dell' angolo, la duplicazione del cubo, l' eterno problema delle quattro rette, la dimostrazione del neo delle parallele lusingavano molto il loro amor proprio, perchè menandosi e rimenandosi per la bocca in queste proposizioni i nomi di Archimede, Diocle, Menecmo, Aristeo, Euclide, Tolomeo, Nassir-Eddin ecc. già si credevano di aver con questi qualche cosa di comune. Pe'progressi che hanno fatto le matematiche per l'applicazione dell'Algebra alla Geometria, si è riconosciuto la inettezza di questo procedere. Epperò oggigiorno i giovani studiano le matematiche per applicarle, ch'è il vero scopo di questo sublime studio. Non pertanto mancano de'giovani, i quali perchè mal consigliati seguono l'antico sistema; e quello ch'è peggio si è, che non conoscendo essi nè gli antichi geometri (perchè questi non con poco tempo e facilità si apprendono) nè i moderni, si fanno a sparlare di questi ultimi. Noi parleremo di alcuni opuscoli scritti da tali giovani, ed il primo che ci si presenta è quello sul quinto postulato di Euclide del Sig. Fusco.

74. Nella prefazioncella di questo opuscolo si chiama *ellenica* la Geometria di Euclide dal perchè Euclide era Greco. Si dice che questa Geometria sia tornata in voga mercè gli sforzi di moltissimi valenti uomini, il che è falso, non essendovi stata epoca in cui i famosi Elementi Euclidei sieno stati più in dimenticanza della presente, nella quale s' insegnano

---

(1) Si stimò sommo Geometra a tempo del Fergola il giovane, che avesse saputo scindere dalla parabola Apolloniana per mezzo di una retta assoggettata a passare per un punto una data area coi metodi antichi. Ecco quando poco ci voleva a quel tempo per avere il titolo di Geometra! Elogio di Niccolò Fergola scritto da un discepolo pag. 20.

Digitized by Google

da per ogni dove quelli del Legendre (1). Si regala a' nostri matematici la grandissima vergogna d'imitare nello scrivere lo stile de' matematici d'Oltremonti.

75. Nel primo Capitolo si discute lungamente se il quinto postulato di Euclide debbasi chiamare postulato, assioma, o teorema; ma senza conchiudere nulla: di maniera che alla fine del penultimo capitolo ei non sa ancora come lo debba chiamare, *io non so come mel debba chiamare postulato, assioma, o teorema*. E qui cade in acconcio il riflettere che questo dubbio è in contraddizione di quella venerazione che ha per Euclide. Ed in vero se questo Geometra incluse (come ei medesimo dice a pag. 15) questo principio tra i postulati, il dubitare se debbasi chiamare assioma, postulato, o teorema non è mettere in forse l'infallibilità Euclidea? Termina il capitolo dicendo che il mitissimo Euclide si sia fatto *tenere lunga fiata un Dio*.

76. Nel 2.° capitolo facendo le viste di discorrere de' diversi infelici tentativi di tanti famosi geometri per dimostrare il quinto postulato di Euclide, ha tutto l'agio di menarsi e rimenarsi per la bocca i nomi di Tolomeo, Proclo, Possidonio, Gemino, Nassir-Eddin, Clavio, Borelli, Wallis, Wolfio, ecc. Noi gli perdoneremmo di leggieri siffatta vanità puerile se non si facesse a parlare qui molto indecentemente della dimostrazione del celebre Legendre, con cui questi dimostra che in ogni triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti. Noi ci prenderemo il nojoso incarico di trascrivere e confutare a mano a mano tutta quanta questa critica.

---

(1) Gli elementi di Euclide non s'insegnano più. Si è riconosciuto da tutti i moderni geometri che la Geometria del Legendre più si affà all'intelligenza de' giovanetti. Alcuni novelli professori per volerli adottare nella loro scuola si son veduti nella dura necessità di dover giustificare la loro scelta con alcune matte osservazioni, delle quali faremo in appresso parola.

« Alla dimostrazione del Legendre non manca certa-
» mente, come da quell'egregio ingegno era da aspettare
» nè eleganza, nè chiarezza, se non che è trascorso in
» taluni errori, che io mi farò mio malgrado a rile-
» vare. E nel vero come potrebbesi ammettere mai
» ciò che egli nel determinare l'enunciato di quel suo
» teorema; *in ogni triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti* (donde deduce alla fine dopo vari
» antirivieni l'incontro delle tante fiate cennate rette)
» va supponendo, esser l'uno de' lati maggiore, mi-
» nore l'altro? Non potrebbe per avventura interve-
» nire contro alla sua supposizione che uguali si fos-
» sero? Ed allora il più saldo fondamento della sua
» dimostrazione non affatto rovinerebbe? Non pare egli
» conveniente che in siffatte dimostrazioni debbasi at-
» tenere a principi più solidi, e meno vacillanti? »

La dimostrazione del Legendre avrebbe lo stesso andamento anche quando avvenisse che tutti e tre i lati del triangolo fossero uguali, dappoichè in tal caso nel solo primo triangolo $AC'B$ (fig. 35 del Legendre) della serie indefinita de' triangoli $A\,C'\,B'$, $A\,C''\,B''$, ecc. A' non è minore, di $\frac{1}{2}$ A, ma uguale. circostanza, che non avendo luogo per tutti gli altri triangoli, pe' quali riesce sempre $A'' < \frac{1}{4}$ A, ecc. non viene punto ad alterare la dimostrazione del Geometra francese, perchè non impedisce d'intendere la serie de' triangoli prolungata finchè l'angolo a sia minore di qualunque angolo dato. Ma senza che il Fusco si avesse presa la pena di vedere come la dimostrazione del Legendre avesse abbracciato il caso particolare, in cui figuravasi che fosse nientemeno per rovinare, poteva scindere il triangolo isoscele o equilatero in due scaleni per mezzo di una retta tirata per una de' suoi vertici e conchiudere per la proposizione del Legendre che tutti i sei angoli pareggiassero quattro angoli retti, da' quali sottraendone i due formati dalla retta tirata col lato del triangolo oppo-

Digitized by Google

sto al vertice per cui si è menata , ne avrebbe conchiuso per altra via la generalità della dimostrazione del Legendre. Ma il Fusco voleva trovare *taluni errori* nella dimostrazione del Geometra francese; e però non ha pensato a tutte coteste cose. Andiamo avanti.

« Ed in qual guisa quell' altro suo principio , che
» l'angolo sotteso dal lato minore da lui segnato con
» *A* diviso e suddiviso indefinitamente a metà riesca
» a zero ? Non si oppone egli alle dottrine Geometri-
» che e all' analisi delle grandezze discrete ? »

Nella stessa guisa rispondiamo che l'angolo compreso tra il lato del poligono regolare iscritto nel cerchio , e la circonferenza diviene minore a misura che cresce il numero de' lati del poligono , e nel *limite*, al quale continuamente si avvicina senza mai pervenirvi, diviene nullo. Ma il sig. Fusco non ha una idea molto netta della espressione limite , e ne dà una forte prova , allorchè si fa salire il grillo in testa di voler ricomporre le scomposte parti dell' angolo *A* del Legendre (ch'ei chiama malavventurato) dopo esser passato al limite.

« Lascio, che se mai a taluno venisse talento di ri-
» comporre le scomposte parti di questo malavventurato
» angolo, non verrebbe giammai per quanti sforzi ado-
» perasse a riescire , chè zero in qualsiasi modo vien
» moltiplicato niente altro, che un simile a se può in-
» generare. »

Ma altri più grossi errori ci restano nella dimostrazione del Legendre.

« Da ultimo benchè gli venisse concesso questo prin-
» cipio non ne verrebbe la conseguenza ch' egli divisa,
» perchè annullati i due angoli del triangolo dato ad-
» iacenti al lato maggiore, ed il terzo andandosi per-
» dendo a poco a poco in lui, di esso non altra cosa
» avanzerebbe che una linea retta ! »

Dunque secondo il Fusco, allorchè i due lati di un angolo si pongono per dritto, l' angolo da essi compreso non diviene uguale a due retti, ma cessa di esser angolo , e si converte in linea retta.

« Nulladimeno se si ammettesse questo teorema la
» sua dimostrazione non sarebbe meno imperfetta; dap-

» poichè egli trascorre in una aperta petizione di prin-
» cipî, accennando a quel celebre lemma Euclideo del
» decimo libro, sul quale poggia non poca parte della
» teorica de' limiti ecc. (1). »

La petizione di principî deriva, dacchè il Fusco ignora o finge d'ignorare lo scopo del lemma. Ed in vero se il lemma è quella proposizione, che si dee sussidiariamente premettere alla dimostrazione di un teorema, o soluzione di un problema per la comprensione del medesimo, e se alla dimostrazione del Legendre non manca nè eleganza, nè chiarezza, come ei medesimo dice, come dunque il Legendre è incorso in un'aperta petizione di principî? Che bisogno aveva questo Geometra di premettere alla sua dimostrazione il celebre lemma Euclideo del decimo libro, se senza di esso la sua dimostrazione riusciva chiara ed elegante? Se il sig. Fusco non avesse mai studiata la Geometria di Euclide, trovando chiara ed elegante la dimostrazione del Geometra francese, non avrebbe certamente in essa rinvenuta la petizione di principî. Ma il maledetto vizio di tutti i Sintetici è di prendere gli Elementi di Euclide per termine di paragone, e condannare tutto ciò che negli altri elementi di Geometria a quelli non si uniforma. Ecco quanti errori il Fusco trova nella dimostrazione del Legendre!

Termina il Fusco questo terzo capitolo con lodare le due dimostrazioni, che del quinto postulato di Euclide ha dato il sig. Scorza; ma mentre le commenda tanto, che giunge a chiamarle celebri, le rifiuta: l'una, perchè *quel prendere i limiti*, *quel dimostrare indiretto*, *il parlare di angolo determinato ed indeterminato sembrano cose non tanto adatte all'intelligenza de' giovanetti*, *che non hanno altre conoscenze oltre quelle poche dottrine poste da Euclide nelle proposizioni che precedono alla rigesimanona.* L'altra, perchè *offuscata da una lieve menda* che con pena ci si fa a rilevare (2).

(1) Del Quinto Postulato degli Elementi di Euclide, pag. 24.
(2) Idem, pag. 46.

Nel n. 32 noi riportammo le dotte osservazioni del ch. professore D. Fedele d'Amante sulla dimostrazione del quinto postulato di Euclide del sig. Scorza, e vedemmo che lo scandalo o neo delle parallele esiste tuttora, e forse esisterà, finchè esiste la Geometria. Qui rifletteremo che nel tempo stesso che la Scuola Sintetica sostiene che gli *Elementi Euclidei avevano conseguito da Euclide tutta la perfezione* (1), sostiene ancora che il sig. Scorza *per vie semplicissime e geometriche ci ha tolto dall' imbarazzo di durar tutte le gravi fatiche in dimostrare quel postulato, che per tanti secoli hanno sofferte tanti geometri distintissimi, cui la compiuta perfezione degli Elementi Euclidei stava a cuore* (2). Dunque se gli Elementi Euclidei mercè gli sforzi dello Scorza hanno ricevuta la compiuta perfezione, è forza conchiudere che erano perfettibili, e che non avevano ricevuta da Euclide tutta la perfezione.

77. Dopo aver il Fusco chiamata Ellenica la Geometria di Euclide; regalata a' nostri matematici la grandissima vergogna d'imitare lo stile de' matematici d'Oltremonti; detto che Euclide si sia fatto tenere lunga fiata un Dio; tanto parlato sul nome da darsi al quinto postulato di Euclide senza venirne a capo; osservato che la dimostrazione del Legendre rovina, allorchè due lati del triangolo sono uguali; che l' angolo diviso e suddiviso indefinitivamente non può divenire minore di qualunque angolo dato e nel limite zero; che l'angolo chiamato A dal Legendre finisce col perdersi in se stesso e col trasformarsi in linea retta; che Legendre trascorre in un' aperta petizione di principii; che le due dimostrazioni dello Scorza sono celebri e difettose nel tempo stesso, si accinge a togliere il neo delle parallele, serbando il metodo sintetico ed il modo di dimostrare dallo Stichiota adoperato. Ma che ne avviene dopo tante ro-

(1) De' Pregi degli Elementi di Euclide e de' difetti di quelli che se ne allontanano. Osservazioni ecc. pag. 61.

(2) Rendiconto delle Adunanze e de' Lavori della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, Anno 1842.

domontate? Voi già ve lo immaginate, o lettori. *Parturient montes nascetur ridiculus mus.* La Geometria ellenica (dice il ch. professore D. Fedele d'Amante nella *Lettera di un Provinciale ad alcuni professori in Napoli,* dalla quale abbiamo preso quasi tutto ciò che si è detto sull' Opuscolo del sig. Fusco) « non fu valevole a di-
» fenderlo da un errore grossolano, degno forse di un
» trisegatore o di un quadratore. Tra la fine della pag.
» 29 e del cominciamento della 30 egli, proponendosi
» di dimostrare indirettamente il suo teorema, crede
» di aver colpito l' assurdo che in tal triangolo vi sa-
» rebbero due angoli retti, e non si accorge che il
» triangolo esiste solamente nella sua figura, ed in
» virtù del nuovo principio che *la base di un triangolo*
» *isoscele è diversa dalla perpendicolare che dall' estremità*
» *di uno de' due lati uguali si abbassa sulla retta che di-*
» *vide per metà l'angolo al vertice*, ciò che in altri ter-
» mini equivale a dire *che la bisecante al vertice di un*
» *triangolo isoscele non è perpendicolare alla base!* »

Digitized by Google

CAP. XIV.

De' pregi degli Elementi di Euclide e de'difetti di quelli che se ne allontanano. Osservazioni di taluni novelli professori per rendere ragione della scelta delle istituzioni geometriche per la loro scuola. ***Mentre cotesti novelli professori imprendono un paralello tra gli Elementi di Euclide e Legendre, assumono i primi per modello, al quale debbonsi paragonare tutti gli altri. Loro maniera di ragionare. Enumerazione dei difetti rinvenuti da essi nella celebre Geometria del Legendre. Si trascrive una nota del*** Catechismo delle Matematiche ***pure del sig Rocco sul proposito. Sperticata menzogna.***

78. Il Califo Omar opponeva a coloro, che il volevano distogliere dallo incendiare i libri della Biblioteca Alessandrina questo ragionamento : *Se essi sono conformi all' Alcorano, sono inutili, e se sono contrari debbono esser abborriti ed annientati.* Or chi potrebbe mai credere che questi novelli professori tenessero un raziocinare consimile? Ed in vero essi si riducono a dire se le istituzioni di Geometria sono conformi agli Elementi di Euclide, non sono che Euclide, e se sono differenti, sono cattive e perniciose alla buona istituzione della gioventù: dimanierachè così ragionando essi non avrebbero alcuna difficoltà di dare alle fiamme, come fece il barbaro Omar, tutto ciò che si è scritto da Euclide in poi in fatto di Geometria elementare. Mentre imprendono un paralello tra la Geometria di Legendre e gli Elementi di Euclide, ammettono come assioma che questi sieno *un prodigio di perfezione dello spirito umano, l'opera più perfetta uscita dalla mano dell'uomo, l'opera che aveva conseguita da Euclide tutta la perfezione*, il modello al quale debbonsi paragonare tutte le altre istituzioni di Geometria, e giudicare del loro maggiore o minore

merito secondo che a un tal modello più o meno si approssimano (1).

79. Ammesso ciò, essi la ragionano, o per meglio dire, la sragionano a un dipresso nel modo seguente.

Euclide non definì la Geometria; ma Legendre la definisce per la *scienza che ha per oggetto la misura dell' estensione* (2), dunque Legendre non dovea definirla. Se dunque un giovinetto, che studia la Geometria, vien interrogato, cosa è cotesta scienza? si dee tacere. Se questi novelli professori avessero posto mente che Euclide per non definire la Geometria dovette avere le sue ragioni, e che Legendre per definirla dovea ancora avere le sue ragioni, avrebbero trovato queste ragioni nelle diverse lingue, in cui scrissero questi due Geometri. La voce greca γεωμετρια componendosi da γῆ, terra e μέτρον misura, tien luogo di definizione in Euclide, e desta nella mente di colui che conosce l' idioma greco ciò che sveglia nella mente di ognuno la definizione di Legendre. Sarebbe cosa superflua e forse errore se un greco definisse le voci αστρονομια γεωγραφια ecc., laddove sarebbe necessario, e commetterebbe un errore, se un francese, inglese, italiano ecc. non le definisse.

Euclide definisce la linea retta per *quella, che si distende ugualmente tra' suoi punti* (3), Legendre *per lo più corto cammino da un punto ad un altro*, dunque la definizione di Legendre è cattiva. Legendre in tale circostanza ha seguito il primo Geometra, che sia comparso sulla faccia della terra. L' autorità di Archimede non basta a giustificare il Geometra francese. Qualunque definizione, quando non è di Euclide, non può essere buona per questi professori.

Euclide definisce il piano per *quella superficie che giace ugualmente fra le sue linee* (4), ma Legendre

(1) De' Pregi degli Elementi di Euclide pag. 8 60 61.
(2) Élémens de Géométrie 15. édition, pag. 1.
(3) Euclide, lib. 1. def. 4.
(4) Def. VII.

Digitized by Google

chiama superficie piana *quella, nella quale presi due punti ad arbitrio ed uniti per una linea retta, questa giace tutta intera nella superficie* (1), dunque la definizione di Légendre non è buona.

Euclide definisce l'angolo piano *per l'inclinazione scambievole di due rette giacenti in piano, che si toccano senza formare una linea retta continuata* (2); ma Legendre lo definisce *per la quantità più o meno grande per cui due rette che s' incontrano, sono tra loro distanti* (3); dunque la definizione di Legendre è pessima. Voi potete dire a questi professori che la definizione Euclidea dell' angolo sembrò cattiva allo stesso Apollonio, come riferisce Proclo; che Proclo lo definisce, come Lacroix, per lo spazio compreso da due linee che s' incontrano; che Lacroix ravvisa nell'inclinazione Euclidea un sinonimo di angolo; che tutti i geometri ravvisano nell' inclinazione se non un chiaro sinonimo di angolo, almeno un vòto, predicate al deserto. Apollonio, Proclo, Lacroix, Legendre e tutti i geometri, che hanno diversamente definito l' angolo, si sono ingannati. E come no? Se Euclide è il solo geometra che *non si è mai ingannato*? Cosa potrete voi rispondere?

Legendre chiama *figure equivalenti* quelle le cui superficie sono eguali, e *figure eguali* quelle, che soprapposte coincidono (4); ma Euclide chiama le prime semplicemente eguali, e le seconde perfettamente eguali; dunque Legendre fa male a così denominarle per la potentissima ragione che si è appartato da Euclide, e l' appartarsi da Euclide non è ben fatto (5).

In una parola tutte le definizioni di Legendre, che differiscono dall'Euclidee, o sono difettose od erronee.

Euclide espose dieci assiomi, ma Legendre n' espone cinque, dunque Legendre ha commesso un errore

---

(1) Élémen's de Géométrie, pag. 1.
(2) Euclide, Def. VIII.
(3) Élémen's de Géométrie, pag. 2.
(4) De' Pregi ecc. pag. 20.
(5) Idem. pag. 20.

Google

Euclide espose de' lemmi, ma Legendre li ha soppressi tutti, dunque Legendre ha errato.

Legendre dimostra che *tutti gli angoli retti sono eguali fra loro*, Euclide no; dunque questa proposizione in Legendre è affatto superflua.

Legendre dimostra che *due rette, che hanno due punti comuni coincidono l'una con l'altra in tutta la loro estensione*; ma Euclide nol dimostra; dunquo questa proposizione è superflua.

Così ragionando, questi novelli professori trovano che delle 31 proposizioni del primo libro di Legendre 14 a modo di Euclide sono affatto superflue, e che de'19 teoremi del secondo libro 12 sono superflui (1).

Il 7 problema di Legendre è una superfluità, il 9. è superfluo ed intuitivo, como del pari lo sono il 1. 11. e il 12, perchè non trovansi in Euclide (2). Legendre trova il rapporto numerico di due linee rette, e di due angoli, qualora queste rette e questi angoli ànno una comune misura; ma Euclide non parlò di misure; dunque queste due proposizioni di Legendre sono *ageometriche* (3).

80. Ragionando con questo tuono ed a questo modo, conchiudono cotesti novelli sintetici che le definizioni di Legendre *mancano delle condizioni per buone definizioni geometriche* (4), che in Legendre *mancano degli assiomi e i postulati* (5), che *non vi è precisione nell'enunciar le proposizioni* (6), *non rigore ed esattezza nel dimostrare* (7), *non eleganza ed esattezza nella soluzione de' problemi* (8); *mancanza di problemi essenziali*, *superfluità di altri* (9), *superfluità di corollari* (10);

(1) Idem, pag. 13. 14.
(2) De' Pregi degli Elementi di Euclide ecc. pag. 16.
(3) Idem, pag. 16.
(4) Idem, pag. 4.
(5) Idem, pag. 28.
(6) Idem, pag. 28.
(7) Idem, pag. 31.
(8) Idem, pag. 48.
(9) Idem, pag. 50.
(10) Idem, pag. 50.

che la Geometria di Legendre è *assolutamente pregiudizievole alla buona istituzione geometrica* (1). Che Legendre sul fatto delle grandezze commensurabili ed incommensurabili si è abbandonato a tutte *le considerazioni non elementari ed affatto geometriche* (2), che dalla Geometria di Legendre *non solamente se ne trae una scienza erronea, ma ne resta anche deturpata l'arte di ben ragionare* (3), che *le verità socie in Legendre veggonsi assai disparate* (4), che Legendre *con poca considerazione tentò una via nuova in un argomento elementarissimo* (5); ch'è una *demenza il preferire per la istituzione della gioventù gli Elementi di Legendre a quelli di Euclide* (6); che *il tentare di cambiare in meglio gli Elementi Euclidei sia vano tentativo non degno di chi è nella Geometria convenevolmente versato* (7).

Vi potevate credere, o lettori, che quella Geometria, che ha riscosso gli applausi di tutta l'Europa, avesse contenuti tanti e sì gravi difetti?

81. Non deesi però negare che qualche volta questi novelli professori, deponendo quel tuono magistrale, si sforzano di ragionare; ma siccome niente può dirsi contro l'evidenza, così essi urtano contro tutti i possibili sofismi. Il professore D. Carlo Rocco in diverse noterelle del suo bel *Catechismo delle Matematiche pure* si ha preso la pena di confutare tutte quelle proposizioni, in cui essi sembrano ragionare. Noi crediamo di far cosa grata al lettore trascrivendo una di tali note.

« I principj su cui poggia la dimostrazione di que-
» sto teorema essendo stati attaccati in un opuscolo *ano-
» nimo* contro le moderne geometrie, stimiamo oppor-
» tuno di fare alcune considerazioni, non per combat-

(1) De' pregi degli Elementi di Euclide e de' difetti di quelli che se ne allontanano. Osservazioni ecc. pag. 16.
(2) Idem, pag. 14.
(3) Idem, pag. 16.
(4) Idem, pag. 38.
(5) Idem, pag. 61.
(6) Idem, pag. 61.
(7) Idem, pag. 66.

» tere autori mascherati, chè non ne varrebbe la pena,
» ma per dilucidare un importante punto di scienza a
» profitto della nostra gioventù studiosa.

» 1.° Nell'opuscolo accennato si sostiene che il rap-
» presentare un rettangolo *per mezzo* del prodotto del
» numero delle unità lineari della base pel numero
» delle unità lineari dell' altezza sia un errore, poi-
» chè (si soggiunge) secondo le regole dell'Aritmetica
» il prodotto di unità lineari per unità lineari non può
» esprimere che *una linea retta, e non un rettangolo.* Ma l'A-
» ritmetica non ha dato mai simili regole spropositate,
» perchè tutti sanno che in una moltiplicazione il mol-
» tiplicatore deve sempre considerarsi come numero
» astratto, onde il prodotto di due quantità dello stesso
» genere, qual è quello di due linee rette, non avreb-
» be alcun significato se non si ricorresse a consi-
» derazioni e convenzioni dipendenti dalla natura del
» soggetto; ed ecco come Newton esprimesi intorno
» a ciò: *quamvis linea utcumque multiplicata non pos-*
» *sit evadere superficies, adeoque haec superficiei e li-*
» *neis generatio longe alia sit a multiplicatione in hoc*
» *tamen conveniunt, quod* numerus unitatum in al-
» terutra linea multiplicatus per numerum unitatum in
» altera producat abstractum numerum unitatum *in*
» *superficie lineis istis comprehensa, si modis unitas*
» *superficialis definiatur, ut solet, quadratum cujus*
» *latera sunt unitates lineares. Quemadmodum si re-*
» *cta* AB *constet quatuor unitatibus et* AC *tribus, tum*
» *rectangulum* BC *constabit quater tribus seu duode-*
» *cim unitatibus quadratis, ut inspicienti schema pate-*
» *bit (Arit. Univ. p. 4.)*: Dunque secondo Newton
» e la ragione, qualunque sia la linea presa per unità
» di misura lineare, purchè si prenda per unità di su-
» perficie il quadrato fatto sopra la linea medesima, il
» numero delle unità lineari contenute nella base di un
» rettangolo moltiplicato pel numero delle unità lineari
» contenute nell'altezza esprime non già una retta, co-
» me si afferma nell'opuscolo, ma bensì un numero
» astratto che dinota il rapporto dell'aja del rettangolo
» a quello del quadrato unità, vale a dire rappresenta

» la *misura* del rettangolo medesimo. E che altro vuol
» dire Euclide allorchè nella prop. 23 lib. 6 dimostra
» che i parallellogrammi equiangoli sono in ragion com-
» posta de' lati, se si prende per conseguente il rombo
» che ha per lato l'unità lineare? È forse la ragion
» composta altro che un numero astratto? Che se dopo
» tutto ciò gli autori, o l'autore dell'opuscolo non ar-
» rivano a comprendere perchè il Legendre dica che *il*
» *prodotto delle linee* A, B *non sia altro che il numero*
» *delle unità lineari contenute in* A *moltiplicato pel nu-*
» *mero delle unità lineari contenute in* B, ne domandi
» ragione a Newton, ad Euclide, e non già ai mo-
» derni scrittori d'istituzioni geometriche, i quali non
» han fatto che seguire i dettami di quei sommi geo-
» metri, o per dir meglio, quelli della ragione. Si può
» dunque conchiudere che quanto nel testo abbiamo detto
» intorno al prodotto di due linee trovasi al coperto
» di qualunque obbiezione, per cui passeremo ad una
» seconda considerazione.

» 2.° La distinzione delle grandezze in commensura-
» bili ed incommensurabili, e propriamente il princi-
» pio adottato qui sopra, onde dimostrare per assurdo
» il teorema nel caso dell'incommensurabilità, e del
» quale si fa un uso mirabile in molte proposizioni ana-
» loghe della moderna geometria, offre all'autore del-
» l'opuscolo summentovato un altro soggetto di censu-
» ra. Applicando, per esempio, il suo ragionamento
» alla nostra figura egli dice: (fig.22.)*come si farà a pren-*
» *dere di* CH *una particella* CR *minore di* AO *che potrebbe*
» *ancora supporsi un infinitesimo dell' ordine n*? (!!!)
» *Ed in che maniera si farà ad ottenere quel residuo* AL?
» Ma in primo luogo come c' entrano qui gl' infinitesi-
» mi, se la differenza *AO* è, e deve considerarsi *una*
» *quantità assegnabile* per quanto piccola si voglia sup-
» porre? E poi chi non sa che un infinitesimo anche
» del semplice primo ordine è al di sotto di qualunque
» quantità data, e che due quantità debbono considerarsi
» uguali allorchè la loro differenza è infinitesima? Laon-
» de il dire che due quantità differiscono per un in-
» finitesimo equivale ad affermare la loro uguaglianza;

» e tutto ciò deriva immediatamente dalla definizione
» delle quantità infinitesime. *Finitae enim quantitates ,*
» dice Boscovich , *sunt eae , quae in se determinatae*
» *sunt : infinitae parvae quantitates sunt eae, quae con-*
» *cipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscunque limites*
» *in se determinatos. Porro contemptus quantitatum infi-*
» *nitesimarum in comparatione quantitatum finitarum nul-*
» *lum errorem parere potest ne infinitesimum quidem.*
» *Nam si illae finitae quantitates essent inaequales , ha-*
» *berent differentiam aliquam in se determinatam , etc.*
» (Elem. Math. T. 1 p. 161).

» L'errore dell'anonimo censore sta dunque nel cre-
» dere che l'infinitesimo non consista in altro che in
» una quantità picciolissima; e per conseguenza la cri-
» tica fatta al Legendre, e ad altri autori di Elementi
» geometrici nel caso della incommensurabilità si risol-
» ve in un accusa contro i principj fondamentali dell'a-
» nalisi infinitesimale. Ma ciò ch'è più sorprendente ,
» il nostro anonimo non si avvede che la sua incon-
» cepibile difficoltà attacca puramente e semplicemente
» la stessa geometria degli antichi , che tanto esalta a
» spese de' moderni ! Infatti , Archimede dimostra che
» il cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo , di
» cui la base uguaglia la circonferenza , e l'altezza il
» raggio ; e la dimostrazione riducesi a dire che se tra
» il cerchio , ed il triangolo si supponga esistere *una*
» *differenza* , siffatta supposizione condurrebbe ad un
» assurdo, che quel sommo Geometra rende manifesto
» con iscrivere e circonscrivere un poligono regolare
» che differisca dal cerchio *di una quantità minore della*
» *differenza accennata.* Ora questo stupendo giojello del-
» l'antica geometria perderebbe tutto il suo splendore
» se si dovesse stare ai dettami dell'autore dell'opu-
» scolo , poichè la differenza , di cui è parola, *potreb-*
» *be supporsi un infinitesimo dell'ordine* n , ed indi si
» potrebbe domandare come Archimede farà a descri-
» vere un poligono che differisca dal cerchio di una
» quantità minore di un infinitesimo dell'ordine *n* ?
» Nè vale il dire che il caso della misura del cer-
» chio è diverso da quello della misura del rettangolo.

Digitized by Google

» Imperciocchè, nell'ipotesi della incommensurabilità si
» è detto qui sopra che se il rettangolo $ACHE$ non
» aveva per misura il prodotto della base CH per l'al-
» tezza CA, avrebbe dovuto avere per misura il pro-
» dotto della base CH per una linea CO, che si è sup-
» posta minore di CA, ossia si è supposto che CO dif-
» feriva da CA per una quantità data AO; indi si è
» dimostrato l'assurdo di questa supposizione con to-
» gliere CR da CA tante volte quante si può, ossia
» con trovare una linea CL che differiva da CA per
» una quantità AL minore della differenza data AO.
» E non è questo lo stesso stessissimo procedimento di
» Archimede? Solamente nel caso del rettangolo il ra-
» gionamento si fa sulle linee rette, ed in quello del
» cerchio sulle superficie, ma il metodo è sempre lo
» stesso, cioè quello di *esaustione*, applicato al caso
» più semplice di misura superficiale. Che se qualcuno
» si rifiutasse all'evidenza delle nostre ragioni, legga
» e mediti il seguente passaggio del sullodato illustre
» Geometra Boscovich, e vedrà se il metodo di esau-
» stione abbia un andamento diverso da quello da noi
» seguito nel dare la misura del rettangolo.

» *Veteres multo longiore ambitu utebantur adhibentes*
» *methodum, quam* exhaustionum *vocant. Concludebant*
» *singulas e binis quantitabus comparandis inter alias bi-*
» *nas ad se invicem accedentes magis, quam pro* quavis
» data differentia, *ac demonstrabant aequalitatem quan-*
» *titatum concludentium inter se, tum inferebant propo-*
» *sitarum aequalitatem pariter inter se, reducendo sem-*
» *per demonstrationem ad absurdum.*

» Dunque pel caso della incommensurabilità i mo-
» derni geometri adoperano gli stessi principj rigorosi
» degli antichi; e però l'accusa fatta ai primi dall'au-
» tore dell'opuscolo, cioè di aver introdotto gl'*infini-*
» *tesimi* negli elementi di Geometria, andrebbe a col-
» pire anche i secondi! Infatti chi non sa che il divino
» Archimede ha fatto uso del metodo di esaustione non
» solo nella misura del cerchio, ma ancora ne' libri
» della sfera e del cilindro, ed in tutti gli altri mi-
» rabili suoi ritrovati? E che diremo del saggio Eu-

Digitized by Google

» clide, il quale anche prima di Archimede aveva di-
» mostrato collo stesso metodo che i cerchi stanno co-
» me i quadrati de' diametri, che il cono è la terza
» parte del cilindro della stessa base e della stessa al-
» tezza, che le piramidi triangolari equialte stanno fra
» loro come le basi, ec..? E da ciò non ne consegne
» evidentemente che l'accusa sovracennata distruggereb-
» be non solo i teoremi di Archimede, ma ancora la
» Geometria solida di Euclide? (!!!)

» 3.° Finalmente rimangono ad esaminarsi le altre
» due difficoltà, delle quali si è fatta menzione nel
» principio di questa nota, e che sono dirette contra
» la Geometria del Legendre come il prototipo de' *no-*
» *vatori* moderni. Diciamo dunqne che la prima diffi-
» coltà, si riduce a negare al Legendre, ed a noi che
» ci troviamo nello stesso caso, che dividendosi una
» retta data *continuamente per metà* si possa giugnere
» ad un residuo minore di qualsivoglia retta data; os-
» sia si riduce a negare la prop. 1 lib. 10 di Euclide,
» che al dire dell' illustre Brunacci è così evidente che
» può prendersi per assioma.

» In quanto poi alla seconda difficoltà; essa non col-
» pisce affatto il Legendre, ma colpisce noi soli: ed
» è cosa curiosissima che si faccia un accusa ad un
» autor classico senza averlo compreso, e che poi que-
» sta accusa vada a ferire un autore non ancora nato!
» Ma noi benchè accusati prima di nascere ci discol-
» peremo facilmente. Infatti a che riducesi la difficoltà
» dell' anonimo? A quella di non poter concepire come
» essendo date dne linee rette disuguali *CA*, *CR*, si possa
» togliere la minore *CR* dalla maggiore *CA* tante volte
» quante si può, o in altri termini si riduce a negare
» il nostro postulato 4.°, ch'è la prop. 3 lib. 1 di Eu-
» clide!!! In conclusiona le difficoltà dell'autore dell'o-
» puscolo condncono alle seguenti conseguenze: si do-
» vrebbero proscrivere le misure dagli elementi di Geo-
» metria, e di più si dovrebbe dare a queste un si-
» gnificato che non si accenna, ma diverso sicuramente
» da quello ammesso da tutti i geometri, dapoichè nel-
» l'opuscolo si dissapprova ciò che ha detto il Legendre,

» e per conseguenza Newton, ed Euclide, come ab-
» biamo veduto più sopra.

» In secondo luogo si dovrebbe ammettere che i teo-
» remi di Archimede, cioè la parte più maravigliosa
» dell'antica geometria solida di Euclide sono dimo-
» strati con gl'infinitesimi.

» Finalmente si dovrebbero negare due proposizioni
» di Euclide, che sono in sostanza due assiomi, o due
« postulati se così si voglia!

» In vista di queste conseguenze, non era miglior
» consiglio scrivere a dirittura contro la certezza della
» Geometria, come fecero Scaligero, ed Hobbes? (1)

82. Fra le altre menzogne asserite da questi profes-
sori vi è la seguente:

» In nostra scuola si è sempre costumato far appren-
» dere con profitto a' giovani in un primo anno sco-
» lastico, gli *Elementi di Geometria piana e solida* di
» Euclide co' teoremi di Archimide sulla *sfera* e sul
» *cilindro*, e la misura del cerchio; inoltre la *Trigo-
» nometria rettilinea*, e lo stesso si è praticato nella
» Regia Università degli Studii nel ristrettissimo nu-
» mero di 120 lezioni ed i giovani vi profittano e ter-
» minato il corso conoscono la Geometria elementare
» e ne rendono conto. Al contrario in altri stabilimenti
» con gli Elementi del Legendre, vi s'impiegano ben

(1) Benchè queste note sieno pregevolissime, pur tutta via noi preghiamo il sig. Rocco a toglierle dal suo bel Catechismo, e stamparle separatamente; e ciò perchè è male far conoscere a semplici giovanetti che una scienza, il cui carattere è l'evidenza, possa così guastarsi da taluni, che il nome di professore si arrogano. Come ancora è male parlare d'analisi e di sintesi ne' libri d'istituzione. Si scrivano pure i libri d'istituzione con quel metodo che a ciascuno piace; ma non se ne parli. I giovanetti non debbono prevenirsi piuttosto per un metodo che per un altro. La loro prevenzione non può essere che fatale alle scienze, perchè non è il risultamento del paragone de' due metodi, che per mancanza di cognizioni non possono adequatamente stabilire. I signori Sintetici con le loro eterne prefazioni, introduzioni e note a' libri d'istituzione, nelle quali magnificano i metodi antichi, non possono dare alla società che giovani prevenuti.

« tre anni non solo con poco profitto; ma con detri-
» mento della regolare istituzione, dovendosi da' mae-
» stri supplire continuamente a dimostrazioni poco in-
» telligibili da' giovani, o ancora poco esatte, o del
» tutto erronee con le analoghe prese da Euclide: il
» che, come ben si vede, deve produrre nell'allievo
» uno spirito falso o almeno poco rigoroso ».

In sulle prime rifletteremo che se quest i professori nella loro scuola hanno sempre costumato di far apprendere gli Elementi di Euclide, essi non sono novelli professori: nè poi ci voleva l'indovino per conoscere ciò. Quel maneggiare la penna con tanta sicurezza e fiducia di sè stesso, quel tuono magistrale, quel dire, parlando nientemeno di un Legendre, *ciò è ben fatto*, *queste* proposizioni sono *ageometriche*, queste *superflue* ecc. non sono cose di novelli professori, le cui penne soglion esser timide e irresolute; ma piuttosto di professori vecchi tenaci della propria opinione. Qualunque però sia l'autore del citato opuscolo a noi poco monta. A noi interessa solamente far avvertire che la Geometria del Legendre s'insegna con grande profitto de' giovani in un solo anno da tutti i professori ed in tutti gli stabilimenti, e nel medesimo anno s'insegna l'Aritmetica e parte dell'Algebra, ed è questa una verità di fatto, da non potersi mettere in dubbio da chicchessia. Il dire dunque che i giovani impieghino tre anni per apprendere la Geometria elementare è una spiattellata menzogna.

Potremmo discorrere di molti altri soggetti, i quali vengono tra i sintetici annoverati, sol perchè si fanno a sparlare de' moderni geometri; ma siccome in far ciò non faremmo che dire a un dipresso cio che abbiamo detto ne' due ultimi capitoli, così ne faremo a meno. Diremo solamente che la scuola del Fergola in origine ci dava delle produzioni secondo gli antichi geometri, le quali se non erano atte a far progredire la scienza, servivano però a mantenere acceso nel nostro Paese il sacro fuoco dell'antica Geometria: al presente si è ridotta a non darci che critiche poco decenti contro i moderni analisti, le quali non possono non arrecare gravissimo nocumento alla nostra gioventù studiosa.

AGGIUNTA AL CAPITOLO II.

83. Teor. (*Fig.* 4.) Se dal punto R si tirino le tangenti RN, Rn all' ellisse CNAn, e la segante RBB', le tangenti BI, B'I condotte pe' punti d' intersezione B, B' dovranno concorrere in un medesimo punto I della retta Nn fra i contatti.

Si unisca il punto R col centro O dell' ellisse, che si riferisca al diametro AC ed al suo coniugato. Chiamando α la retta OR, x', y' ed x'', y'' le coordinate di B, B', si avranno per l' ellisse, la segante, e le tangenti BI, B'I l' equazioni

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \ldots (1) \qquad \left.\begin{matrix} a^2 y' y + b^2 x' x = a^2 b^2 \\ a^2 y'' y + b^2 x'' x = a^2 b^2 \end{matrix}\right\} (3)$$
$$y = A(x - \alpha) \ldots (2)$$

Chiamando X l'ascissa del punto I, si avrà dall' equazioni (3)

$$X = \frac{a^2 (y'' - y')}{x' y'' - y' x''} \ldots (4).$$

Eliminando la y tra l' equazioni (1) e (2), si avrà

$$A^2 a^2 (x - \alpha)^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \text{, ovvero}$$
$$(A^2 a^2 + b^2) x^2 - 2A^2 a^2 \alpha x = a^2 b^2 + A^2 \alpha^2 a^2,$$

donde si dedurrà

$$x = \frac{A^2 \alpha a^2}{A^2 a^2 + b^2} \pm \text{ un radicale.}$$

Indicando con r questo radicale e con p la parte razionale di x, i valori di x', x'' saranno rappresentati da $p + r$, $p - r$. La sostituzione di questi valori nell'equazione (2), darà per y', y'', $Ap - A\alpha + Ar$, $Ap - A\alpha - Ar$, ovvero, $p' + Ar$, $p' - Ar$, ponendo $Ap - A\alpha = p'$. Sostituendo i valori di x', x'', y', y'' nell' equazione (4), si avrà

$$X = \frac{a^2 (p' - Ar - p' - Ar)}{(p + r)(p' - Ar) - (p' + Ar)(p - r)}$$

Digitized by Google

$$= \frac{-2\lambda a^2 r}{-2p\lambda + 2p'r} = \frac{-\lambda a^2}{-p\lambda + p'},$$

e ponendo per p' il suo valore, si avrà infine

$$X = \frac{a^2}{\alpha}.$$

Ma l'equazione $X = \frac{a^2}{\alpha}$ é l'equazione della retta Nn fra contatti (n. 12); dunque ecc.

Il sig. Fergola, dopo avere speso indarno più ore per dimostrare coll'analisi moderna questo teorema, dovette cambiar rotta, perchè erasi ingolfato in un mare, di cui ignorava li scogli e le sirti. *Nel congegnare*, così egli si esprime, *un'analitica dimostrazione al presente teorema più ore io spesi indarno nel voler quella dall'equazion dell'elisse ed in facil modo derivare. Ma poichè mi avvidi che cotesta ricerca potevasi istituire in un triangolo, i cui lati fosser divisi armonicamente, e pe' punti delle divisioni vi passassero due rette, io mi rivolsi di buon grado ad esplorare se queste rette dovesser convergere ad uno stesso punto della base. Ed avendo ciò analiticamente ed in agevol maniera dimostrato, ne formai il lemma precedente che racchiude una rigida e soddisfacente dimostrazione al teorema quassù proposto* (1).

Ecco cosa fa il sig. Fergola per dimostrare il teorema in discorso. Premette un lemma, col quale dimostra che se due lati di un triangolo son divisi armonicamente, le rette che passano pe' punti delle divisioni, incontreranno il terzo lato in uno stesso punto. Indi dimostra che se da un punto fuori di una ellisse si conducano ad essa le tangenti ed una segante qualunque, questa resterà divisa armonicamente dall'ellisse e dalla retta fra i contatti delle tangenti. Poscia, servendosi del lemma precedente, dimostra che se da un punto fuori dell'ellisse si tirino ad essa le tangenti RN, Rn, e le due seganti RM, Rb', le rette MB', M'B, che uniscono i punti d'intersezione inferiori e superiori di queste seganti, dovranno convergere in uno stesso punto I' della retta Nn fra i contatti. Infine facendo

(1) Trattato Analitico delle Sezioni Coniche, n. 128.

rotare intorno al punto R la segante RM finchè si confonda con l'altra RB', ne deduce il teorema da noi dimostrato, perchè le rette M'B, MB', dovendo convergere ad uno stesso punto della NI indipendentemente dall' angolo MRb' di dette seganti, lo dovranno ancora, allorchè l'angolo diviene nullo, ossia quando le seganti si saranno confuse, nel quale caso M'B, MB' si saranno convertite nelle tangenti BI, B'I.

Premesso tutto questo, domandiamo di grazia, se la brevità della dimostrazione del sig. Fergola sia una conseguenza del metodo da lui adoperato, ovvero dell'ammasso delle proposizioni, che si ha precedentemente stabilite?

84. Dopo aver il Fergola dimostrato tutti gli anzidetti teoremi, definita la linea di sublimità dell'ellisse, e fatto a vedere che ciascun ramo dell' ellisse sta alla distanza del suo estremo dalla vicina linea di sublimità, come l'eccentricità al semiasse, dimostra brevissimamente in uno scolio, che se dal fuoco F (*Fig. 21*) della ellisse MM'P, si tirino i rami FM, FM', ed a' loro estremi le tangenti MT, M'T, la retta FT, che unisce il concorso T di queste tangenti col fuoco F, dividerà l'angolo MFM' de' rami in due parti uguali. Indi secondo il solito soggiugne una nota, onde far conoscere la superiorità del metodo cartesiano sulla modernissima maniera algebrico-geometrica. Ecco la nota:

« Questa verità geometrica se vogliasi rintracciare per
» certe vie analitiche moderne, si dovrà tener conto di
» molte cose, e principalmente dell'equazioni alle tangenti
» dell' ellisse ne' punti (*Fig. 21*) M, M', di quelle de'
» rami FM, FM', dell'altra alla retta FT che vi congiun-
» ge il fuoco F col concorso di quelle due tangenti, etc.
» Ed io m' immagino, che cotesto calcolo dovrebbe riu-
» scire assai complesso, ed ai giovani molesto, come l'ho
» ravvisato in altre ricerche di questa anche più agevo-
» li. Infatti per addurne un di cotesti esempii, se:
Vogliasi rinvenire il luogo de' vertici de' triangoli, che abbiano la stessa base, ed una data somma degli angoli in sulla base, colla Geometria Cartesiana si potrebbe in
» facil modo ottener l' intento » etc. (1)

Noi facendo eco al sig. Fergola diremo che la dimo-

(1) Trat. anal. delle Sez. con. 167.

strazione della verità dedotta da lui brevemente riesce lunga assai, qualora si voglia immediatamente dedurre dall'equazioni dell'ellisse, de' rami, delle tangenti, e della congiungente; ma non sappiamo, perchè gli analisti moderni debbono partire dall'equazioni principali, e non servirsi delle proposizioni precedenti, le quali dimostrate coll'analisi moderna non sarebbero forse più lunghe di quelle, che riescono coll'analisi Cartesiana. Intanto non possiamo astenerci di riflettere che il Fergola non aveva saggiata la lunghezza del calcolo per dimostrare l'anzidetta verità, e che dicendo: *Ed io m'immagino, che cotesto calcolo dovrebbe riuscire assai complesso, ed ai giovani molesto*, dà chiaramente a divedere di aver ciò solamente sospettato. Il dire poi che il calcolo che deesi eseguire, onde avere il luogo geometrico de' vertici de' triangoli aventi la stessa base, ed una data somma degli angoli alla base debba riuscire assai complesso per mezzo dell'analisi moderna, laddove coll'analisi Cartesiana riesce facile, è darne un'altra pruova della sua scarsa conoscenza di questa analisi. E per verità la ricerca dello anzidetto luogo geometrico riesce facile non solo coll'analisi Cartesiana; ma anche con qualunque metodo si voglia adoperare. Volendo trovare siffatto luogo geometrico colla geometria elementare basta descrivere sulla retta base de'triangoli un segmento di circolo capace di un'angolo supplemento della somma degli angoli alla base. Colla geometria a due coordinate il calcolo non è affatto più lungo di quello, che fa il sig. Fergola coll'analisi Cartesiana. Ed in vero prendendo la AD (*Fig. 22.*) per asse delle x, e facendo AD$=a$, AP$=x$, PM$=y$, l'equazioni delle rette AM, DM, saranno

$y=Ax$, $y=-A'(a-x)$,

donde si avrà $A=\frac{y}{x}$, $A'=\frac{-y}{a-x}$, e ponendo la tangente

dell'angolo dato AMD$=\frac{a}{b}$, si otterrà

$$\frac{a}{b}=\frac{A-A'}{1+AA'} \quad \ldots\ldots (1),$$

(1) Lacroix, Applic. dell'Alg. alla Geometria, 5. ediz. n. 93.

e sostituendo ad A, A′ i loro valori, si avrà

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{y}{x}-\frac{-y}{a-x}}{1-\frac{y^2}{ax-x^2}}=\frac{ay}{ax-x^2-y^2},$$

donde
$$x^2+y^2-ax-by=0,$$

ch'è l'equazione al cerchio.

85. Data l'ellisse (*Fig. 4*) ANB, e il punto R si cerca la linea che passa pe' punti medi delle corde condotte per lo dato punto.

Riferendo l'ellisse al diametro CA, che passa per R ed al suo coniugato, ritenendo le dominazioni del n. 83, e chiamando $x_{,}$ $y_{,}$ le coordinate della locale cercata, si avrà n. 83.

$$x_{,}=\frac{x'+x''}{2}=\frac{A^2a^2\alpha}{A^2a^2+b^2}$$

$$y_{,}=\frac{y'+y''}{2}=-\frac{Ab^2\alpha}{A^2a^2+b^2}$$

Se si elimina A fra queste due equazioni, si avrà una relazione tra $x_{,}$, $y_{,}$, che rappresenterà la locale richesta.

Dividendo l'una per l'altra queste due equazioni, si conseguirà

$$\frac{x_{,}}{y_{,}}=-\frac{Aa^2}{b^2},\text{ e quindi }A=-\frac{b^2x_{,}}{a^2y_{,}}.$$

Sostituendo questo valore nella prima dell'equazioni, si otterrà, fatte le ovvie riduzioni, l'equazione all'ellisse

$$a^2y^2_{,}+b^2x^2_{,}-b^2\alpha x_{,}=0,\text{ ovvero } a^2y^2+b^2\left(x-\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2=\frac{b^2\alpha^2}{4},$$

i cui diametri congiugati sono $\frac{b^2\alpha^2}{4b^2}$, $\frac{b^2\alpha^2}{4a^2}$, e quindi proporzionali ad a e b. Laonde la locale cercata sarà un'ellisse simile alla data.

L'illustre Fergola risolve elegantemente con l'anali Cartesiana questo stesso problema, e v'impiega due p gine; poscia in uno scolio lo chiama *preclaro*, e *più pr claro e agli analitici metodi restio* (1). L'altro analogo p l'iperbole, il quale è del tutto uniforme al già esposto e non ne differisce che per un cambiamento di segno. D questo ed altri esempi, che non esporremo per non ess infiniti, si può dedurre che tanti problemi voluti *diffic li, preclari, sublimi e agli analitici metodi restii* non p tevano meritare l'attenzione de' moderni analisti, i qua perciò li hanno tralasciati ne' corsi di Geometria analitic Ond' è che a torto si va ripetendo aver i moderni tra andate ne' corsi d'Istituzione molte cose e di grave m mento e *lievi cose sol vi sospingono*, avvegnachè que ne' corsi d'Istituzione non hanno avuto altro scopo se n quello di mettere i giovani alla portata di poter compre dere il rimanente delle matematiche, al quale utile sco non miravasi da quarant'anni presso di noi, e le Sezio Coniche sembravano le colonne d'Ercole, che i giovani n sapevano oltrepassare.

(1) Trat. anal. delle Sez. Con. n. 140.

FINE.

ERRORI				CORREZIONI
Pag. 34	ver.	13	sarebbe	sebbene
» 49	»	12	Bonaroti.	Bonarroti
» ib.	»	24	Leibiniz	Leibnitz
» 4	»	23	coordinate	a due e tre coordinat
» 115	»	28	punto A.	punto B
» 116	»	1	poc	pcO
» 119	»	30	EAF.	E'AF
» 125	»	33	prefige	prefigge
» 130	»	20	improvisava . . .	improvvisava

VAL 1531367

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI